C1 機率

選擇題 40 題：(每題 2.5 分)

1 (1) 令 (X,Y) 為具有機率密度函數(pdf) $f(x,y)=2$，當 $x<y<1$ 且 $f(x,y)=0$ ，當 x,y 為任意值時之聯合分佈，計算 $P\left\{Y\geq\frac{1}{2}\,|\,x=\frac{1}{2}\right\}$ 之值為

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

2 (2) 已知隨機變數 X 之累積機率分配(cumulative distribution function)如下：

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x^2}{100}, & 0\leq x<8\\ 0.8, & 8\leq x<10\\ 1, & x\geq 10\end{cases}$$

求低四分位數(lower quartile)為何？（計算至小數點第二位，四捨五入）

(1) 3.02 (2) 5.00 (3) 7.21 (4) 9.13

3 (4) 假設某電話中心一週內，星期一至星期五每天打進來的電話量均服從具有平均數 1 的卜瓦松(Poisson)分佈，星期六或星期日每天打進來的電話量則服從具有平均數 2 的卜瓦松(Poisson)分佈，令一週內每天打進來的電話量均是獨立的事件，請計算電話中心一週剛好 10 通電話的機率是多少(請四捨五入計算至小數第二位)

(1) 0.15 (2) 0.14 (3) 0.13 (4) 0.12

4 (2) 隨機變數 X 服從具有平均數 1 的指數(Exponential)分佈。若 $Y=|X-2|$，請計算機率密度函數 $f_Y(1)$ 之值為(請四捨五入計算至小數第二位)

(1) 0.40 (2) 0.42 (3) 0.44 (4) 0.46

5 (1) 兩隨機變數 X, Y 具有聯合密度函數 $f(x,y)=ke^{-(x^2-xy+y^2)/2}$ ，$-\infty<x,y<\infty$ ，其中 k 為正常數。求 k 之值為何？

(1) $\frac{\sqrt{3}}{4\pi}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\pi}}$ (4) $\frac{3}{\sqrt{2\pi}}$

6.(4) 設 X 均勻分佈於區間 $(0, 5)$，Y 均勻分佈於區間 $(0, X)$，令 $0 < x < 5$，求給定 $X = x$ 之後，Y 的條件變異數？

(1) $\frac{x^2}{3}$ (2) $\frac{x^2}{2}$ (3) $\frac{x^2}{6}$ (4) $\frac{x^2}{12}$

7 (1) 令 A 先生未來壽命 X 為服從具有平均數 α 之指數分佈, B 先生未來壽命 Y 為服從具有平均數 β 之指數分佈。假設 A 先生與 B 先生未來壽命分佈是彼此獨立的。求 A 先生未來壽命超過 B 先生之機率？

(1) $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ (2) $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$ (3) $\frac{\alpha-\beta}{\alpha}$ (4) $\frac{\beta-\alpha}{\beta}$

8 (4) 隨機變數 X，Y 為獨立同分佈。$X+Y$ 動差生成函數(Moment generating function)為 $M(t) = 0.09e^{-2t} + 0.24e^{-t} + 0.34 + 0.24e^{t} + 0.09e^{2t}$，$-\infty < t < \infty$，求 $P(X \le 0)$？

(1) 0.33 (2) 0.34 (3) 0.50 (4) 0.70

9 (4) 某產險公司將車險保單持有人分成優良駕駛及不佳駕駛二群，優良駕駛這群平均理賠金額為 1400，變異數為 40,000；不佳駕駛這群平均理賠金額為 2000，變異數為 250,000，60%保單持有者為優良駕駛。求任一保單持有者理賠金額的變異數

(1) 124,000 (2) 145,000 (3) 166,000 (4) 210,400

10 (4) 假設 $Y_1, \cdots, Y_n$ 為取自在區間(0,2)均勻分佈的次序統計(order statistics)。求 $P(Y_1 < \frac{1}{2} < Y_n)$

(1) $\frac{3^n - 1}{4^n}$ (2) $\frac{3^n + 1}{4^n}$ (3) $\frac{4^n - 1 - 3^n}{4^n}$ (4) $\frac{4^n + 1 - 3^n}{4^n}$

11 (1) 假設一個損失隨機變數 Y 具有下列密度函數：$f_Y(y) = 0.25,$ 若 $y = 1$；$f_Y(y) = 0.75$。若 $E(X) = \frac{13}{8}$，$E(X \mid Y=1) = \frac{7}{4}$。求 $E(X \mid Y=2)$

(1) 1.58 (2) 1.92 (3) 2.13 (4) 2.35

12 (3) 若已知

(i)至少一事件發生的機率為 0.7，
(ii)A 發生但 B 沒有發生的機率為 0.2，請問 B 發生之機率為何？
(1) 0.35　(2) 0.42　(3) 0.50　(4) 0.61

13 (3) 隨機變數 X 及 Y 之聯合機率密度函數(joint probability density function)如下：

$f_{XY}(x,y)=\begin{cases} x+y, & 0<x<1, 0<y<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，求 $E(X|Y=0.5)$。

(1)3/8　(2)1/2　(3)7/12　(4)9/22

14 (3) 隨機變數 X 之機率密度函數(probability density function)為

$f_X(x)=\begin{cases} ae^{-ax}, x>0 \\ 0 \quad ,\text{其他} \end{cases}$，若 $\mathrm{M}_X(t)$ 為其動差生成函數(moment generating function)，

求 $M_X(-3a)=?$
(1)-1　(2)0　(3)0.25　(4)3

15 (4) 某公司替該公司三名員工投保住院日額 2000 元之保險。假設未來一年每位員工住院的機率均為 10%，且住院行為獨立。若員工有住院，其一年之總住院日數為一日的機率為 10%，二日的機率為 20%，三日的機率為 30%，四日的機率為 40%。請問公司員工未來一年獲得之理賠總金額低於五千元之機率為何？(計算至小數點第四位，四捨五入)
(1)0.0488　(2)0.0731　(3)0.0732　(4)　0.8022

16 (3) 若隨機變數 X,Y 在 $0<Y<|X|<2$ 範圍中均勻分配(uniformly distributed)，求 $P(Y<X)=?$
(1)1/4　(2) 1/3　(3) 1/2　(4) 2/3

17 (2) 假設台北市的 20 歲以上的居民對於悠遊卡便利性的滿意度高達 80%，若隨機抽取五位 20 歲以上之台北市居民，請問五位中剛好有四位表示對悠遊卡滿意的機率為何？ (四捨五入，取小數點兩位)
(1)0.32　(2)0.41　(3)0.80　(4)1.00

18 (1) 若隨機變數 X 具卜瓦松分配(Poisson distribution)，其平均數為 100。請問 $P(X>100)=?$　(四捨五入，取小數點兩位)
(1)0.31　(2)0.5　(3)0.52　(4)0.69

19 (4) 已知隨機變數 X 在(0,1)兼具均勻分配(uniform distribution)，求

$$P(X+\frac{1}{X}>2)=?$$

(1)0.25　(2)0.5　(3)0.75　(4)1

20 (1) 已知隨機變數 X，Y 具二維常態分配(bivariate normal distribution)，且 $Var(Y)=10$。若 $Var(Y\mid X=2)=7.5$，且 Y 與 X 為負相關，求其相關係數 ρ 為何？

(1)-0.5　(2)-0.25　(3)0.25　(4)0.5

21 (3)下列敘述何者錯誤？

a. 若 $\mathrm{P(A)=P(B^{\mathit{C}})}$，則 $\mathrm{A^{\mathit{C}}=B}$。

b. 若 $\mathrm{P(A)=0}$，則 $\mathrm{A}=\emptyset$。

c. 若 $\mathrm{P(A)P(B)\neq 0, P(A)=P(B)}$，則 $\mathrm{P(A|B)=P(B|A)}$。

(1) a　(2) b　(3) a b　(4) b, c

22 (3) 某保險公司的保險商品銷售紀錄顯示：一個新保險商品的銷售量會超過預估銷售量的機率為 0.10，接近預估銷售量的機率為 0.32，低於預估銷售量的機率為 0.58。銷售量超過預估的保險商品會再推出調整後的新保險商品的機率為 0.70，銷售量接近預估的保險商品會再推出調整後的新保險商品的機率為 0.50，銷售量低於預估的保險商品會再推出調整後的新保險商品的機率為 0.20。試問該保險公司某個新保險商品會再推出調整後的新保險商品的機率為何?

(1) 0.116　(2) 0.186　(3) 0.346　(4) 0.486

23 (3) 令 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{\theta}{2} & 0<x<1\\ \frac{1}{2} & 1\le x\le 2\\ \frac{1-\theta}{2} & 2<x<3\end{cases}$ ，$0\le\theta\le 1$。試問下列何者為 X 的中位數與平均數之和?

(1) $3-2\theta$　(2) $3-\theta$　(3) $4-2\theta$　(4) $4-3\theta$

24 (4) 令 X 為某保單一年發生之理賠金額。若 X 之機率密度函數(pdf)為

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{\alpha}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha-1}e^{-(x/\theta)^{\alpha}} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$ ，$\alpha>0$，$\theta>0$。

若理賠金額之第 20 百分位數為 100，而第 80 百分位數為 10,000，試問α的值為何?

(1) 0.19343 (2)0.26417 (3) 0.34147 (4) 0.2904

25 (2) 若隨機變數 X 的動差生成函數為

$\mathrm{M(t)} = (0.2e^t)^2(1-0.8e^t)^{-2},\ t < -\ln(0.8)$，試問$\mathrm{P(X \le 5)}$為何?

(1)0.18080 (2)0.26272 (3)0.97280 (4)0.99328

26 (4) 若隨機變數 X 之機率密度函數為

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-(x/\beta)^\alpha} & 0 \le x < \infty \\ 0 & x < 0 \end{cases}，\alpha > 0，\beta > 0。$$

令$\mathrm{Y} = -2\ln[1-e^{-(x/\beta)^\alpha}]$，下列敘述何者正確?

a. Y 的機率密度函數為 $f_Y(y) = \begin{cases} 4y\,e^{-2y} & 0 \le y < \infty \\ 0 & 0 > y \end{cases}$

b. Y 為卡方(Chi-square)分配

c. Y 伽瑪(gamma)分配

d. Y 的變異數為 4

(1) a, b (2) a, c (3) a, b, c (4) b, c, d

27 (3) 隨機變數 X 與 Y 之聯合密度函數為

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(6-x-y) & 0 < x < 2,\ 2 < y < 4 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}。$$

試問$\mathrm{E(Y|X)}$為何?

(1) $\frac{23-8x}{7-2x}$，$0 < x < 2$ (2) $\frac{23-7x}{8-3x}$，$0 < x < 2$ (3)$\frac{26-9x}{9-3x}$，$0 < x < 2$

(4) $\frac{29-8x}{8-2x}$，$0 < x < 2$

28 (1) 設$X_1, X_2, \dots, X_8$為從分布於(0, 1)均勻分配所抽取的樣本。令

$\mathrm{U} = \min(X_1, X_2, \dots, X_8)$，$\mathrm{W} = \max(X_1, X_2, \dots, X_8)$。

試問 $\mathrm{P(0.25 < W < 0.75 \mid U = 0.5)}$為何？

(1)0.0078125 (2) 0.0234365 (3) 0.031250 (4) 0.037815

29 (3) 設一通電話的通話時間為指數分配，其平均通話時間為 5 分鐘。今隨機抽樣五通電話，令 Y 為這五通電話裡通話最短的時間。試問 $\mathrm{P(Y > 3)}$為何？

(1)0.367879 (2) 0.135335 (3) 0.049787 (4) 4. 0.632121

30 (1) 某保險一年總理賠的金額為$S_N = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$，其中$N$為一年所發生理賠的件數，$X_1$，$X_2$，$X_3$，... 為獨立且相同分配之理賠金額。若理賠件數$N$的機率函數(probability mass function) $f_N(n) = 0.2(0.8)^{n-1}$，$n = 1, 2, 3, \ldots$，而理賠金額X_i的機率密度函數 $f_X(x) = \frac{1}{500}e^{-x/500},\ 0 < x < \infty$。試問

$P(S_N \geq 2000)$為何?

(1)0.449329 (2) 0.301194 (3) 0.201897 (4) 0.135335

31 (2) 下列敘述何者正確？

(1) 若 A 與 B 為兩互斥事件，且 $P(A)P(B) \neq 0$，則 $P(A^C | B) = 1 - P(A)$。

(2) 若事件 A 與事件 B 獨立，則A^C與 B 也兩獨立。

(3) 若事件 A 與事件 B 獨立，事件 B 與事件 C 獨立，事件 A 與事件 C 獨立，則 A，B，C 同為獨立事件。

(4) 以上均正確

32 (4) 某教授所授課的統計學有 28 位女生與 32 位男生。若以不歸還(without replacement)方式抽點 2 位學生。試問第二位被抽點的學生為男生的機率為何?

(1) $\frac{8}{15}$ (2) $\frac{217}{885}$ (3) $\frac{224}{885}$ (4) $\frac{472}{885}$

33 (4) 令 X 與 Y 為二元常態(bivariate normal)分配，其母數

$\mu_X = 5, \mu_Y = 10, \sigma_X^2 = 1, \sigma_Y^2 = 25$。

若 X 與 Y 的相關係數 $\rho_{X,Y} > 0$ 且$P(4 < Y < 16 | X = 5) = 0.9544$，試問

ρ_{XY} 為何？($\Phi_Z(2) = 0.9772$, Φ_Z為標準常態分配之分配函數。)

(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{2}{3}$ (3) $\frac{3}{4}$ (4) $\frac{4}{5}$

34(4) 設Z_1, Z_2為兩個獨立的標準常態分配$N(0,1)$。下列敘述何者為正確?

a.$Z_1 - Z_2$ 與 $Z_1 + Z_2$ 為相同分配

b.$Z_1 - Z_2$ 與 $Z_1 + Z_2$ 互相獨立

c.$Z_1^2 - Z_2^2$ 與 $2Z_1Z_2$ 為相同分配

(1) a, b (2) b, c (3) a, c (4) a, b, c

35 (2)某賭局以一顆骰子進行，每次投擲若不出現 6，則可獲得 1,000 元，並可繼續投擲，直到 6 出現才停止，請問參加此種賭局平均而言可獲得多少錢？

(1) 4,000 (2) 5,000 (3) 6,000 (4) 7,000

36 (1) 兩連續隨機變數 X，Y 具有聯合密度函數 $f(x,y)=\frac{8}{3}xy$，

$0\le x\le 1,\ x\le y\le 2x$，求 X，Y 之共變異數？

(1) 0.04 (2) 0.25 (3) 0.67 (4) 0.80

37 (2) 一家公司販賣地震險，每年保費隨機變數服從平均數為 2 的指數分佈；每年理賠隨機變數服從平均數為 1 的指數分佈。保費及理賠為兩獨立變數。假設 X 為理賠對保費的比值，求 X 的密度函數

(1) $\frac{1}{2x+1}$ (2) $\frac{2}{(2x+1)^2}$ (3) e^{-x} (4) $2e^{-2x}$

38 (1) A、B 為兩互斥事件，下列何者敘述為真？

(1) A 不發生之機率，大於 B 發生之機率

(2) A 不發生，則 B 一定發生

(3) A 與 B 沒有任何關係

(4) A 發生，不影響 B 發生

39 (1) 已知隨機變數 X 具指數分配(exponential distribution)，其平均數為 1。若 $Y=e^X$ 且 $f_Y(y)$ 為 Y 之機率密度函數(probability density function, pdf)，求 $f_Y(e)$ 之值。(四捨五入，取小數點兩位；e =2.7182818)

(1)0.14 (2) 0.37 (3) 0.61 (4)0.78

40 (4) 若隨機變數 X，Y，Z 之聯合機率函數為

$$f_{XYZ}(x,y,z)=\frac{20!}{x!\,y!\,z!}(0.2)^x(0.5)^y(0.3)^z,$$

其中 $x+y+z=20, x=0,1,\cdots,20, y=0,1,\cdots,20, z=0,1,\cdots,20$

求 $Var(Y)$。

(1) 0.5 (2) 1 (3) 3 (4) 5