

C1 機率

選擇題:(每題 2.5 分)

1.(4) 某產險公司將車險保單持有人分成不佳駕駛、一般駕駛及優良駕駛三類，這三類保單量佔該公司比例分別為 15%、60%及 25%；根據統計該公司這三類保單持有人隔一年發生事故的機率分別 0.02、0.002 及 0.001。今隔一年有事故發生，請問是優良駕駛這類保單持有人的機率為何？

- (1) 0.014 (2) 0.025 (3) 0.028 (4) 0.056

2.(1) 隨機變數 X 具有機率質量函數(probability mass function, p.m.f.): $P(X = -2) = 0.25$
 $P(X = 0) = 0.25$, $P(X = 1) = 1/3$, $P(X = 2) = 1/6$, 求下列哪個數是隨機變數 X 的中位數 (median) ?

- (1) 0.6 (2) 1.2 (3) 1.8 (4) 1.9

3.(2) 令 (X, Y, Z) 具有機率密度函數 (probability density function, p.d.f.)

$$f(x, y, z) = 2e^{-x-y-z} \quad , \quad \text{當 } x > 0, y > 0, z > 0 \quad ; \quad f(x, y, z) = 0 \quad , \quad \text{除了}$$

$x > 0, y > 0, z > 0$ 之外。計算 $P[X < Y < Z]$ 之值 ?

- (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{7}{6}$ (4) $\frac{7}{3}$

4.(4) 令 X, Y, Z 為具有指數分佈 $f(x) = e^{-x}$, 當 $x \geq 0$; $f(x) = 0$, 當 $x < 0$ 之獨立相同分佈隨機變數。令 $M_1 = X + Y + Z$, $M_2 = \frac{X + Y}{X + Y + Z}$, $M_3 = \frac{X}{X + Y}$, 則下列敘述何者錯誤 ?

(1) $0 < m_1 < \infty$

(2) $0 < m_2, m_3 < 1$

(3) M_1, M_2, M_3 聯合機率密度函數(joint p.d.f.)為 $w(m_1, m_2, m_3) = m_2 m_1^2 e^{-m_1}$

(4) M_1, M_2, M_3 聯合機率密度函數(joint p.d.f.)為 $w(m_1, m_2, m_3) = m_2 m_1^2 e^{-m_3}$

5.(1) X, Y 具有聯合機率質量函數(joint probability mass function)如下表。令 $Z = X - Y$, 則下列敘述何者錯誤 ?

		X		
		1	2	3
Y	1	1/12	2/12	1/12
	2	1/12	0	1/12
	3	2/12	0	4/12

- (1) Z 與 $-Z$ 有相同分佈
 (2) X, Y 同分佈但不獨立
 (3) $P[Z = -1] = 1/12$
 (4) $P[Z = 0] = 5/12$

6.(3) 一盒子內有編號 1 到 N 顆球，求在 n 次隨機取出放回試行中，最大數等於 k 之機率值為何？

(1) $\left(\frac{k}{N}\right)^n$ (2) $\left(\frac{k-1}{N}\right)^n$ (3) $\left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n$ (4) $\left(\frac{k}{N}\right)^n + \left(\frac{k-1}{N}\right)^n$

7.(3) 假設靶上各同心圓半徑分別為 1,2,3 將靶區隔成三塊區域，射中得分分別為 3,2,1。請問如果偶然射中靶得分為 X ，請問如果隨機發射 3 箭分別設中不同區域的機率為何？

(1) $\frac{5}{243}$ (2) $\frac{15}{243}$ (3) $\frac{30}{243}$ (4) $\frac{90}{243}$

8.(3) (X, Y) 具有聯合機率質量函數(joint probability density function)如下：

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} p^2(1-p)^{x+y} & x, y = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

設 $S = X + Y, D = X - Y$ 下列敘述何者錯誤？

- (1) $P[X = x] = p(1-p)^x$
 (2) $P[Y = y] = p(1-p)^y$
 (3) $P[S = s] = sp^2(1-p)^s$
 (4) $P[D = d] = \frac{p(1-p)^d}{2-p}$

9.(3) 設隨機變數 X 服從具有機率密度函數(probability density function) $f_X(x)$ ，平均數 μ 及變異數為 σ^2 的常態分佈，今 $Y = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$ ，求 $P[Y \leq \frac{1}{2}]$ 之值？

(1) 0 (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) 1

10.(4) 假設隨機變數 X 具有累積分佈函數 $F(x) = \frac{k}{2} - \frac{k(1+x)^{-2}}{2}$, $0 < x < \infty$ 。求其期望值

- (1) 0 (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) 1

11.(3) 假設隨機變數 X 動差生成函數(moment generating function)為 $M_X(t) = \frac{1}{4} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^t}$, $t < \ln 2$

求 $P[X > 3]$

- (1) $\frac{15}{32}$ (2) $\frac{16}{32}$ (3) $\frac{17}{32}$ (4) $\frac{18}{32}$

12.(2) 假設隨機變數 X 服從 $\text{Unif}(-1,3)$ 均勻分佈。求方程式 $f(t) = t^2 + 2Xt + X + 2 = 0$ 兩個根都是實根的機率值

- (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{8}$ (4) $\frac{1}{16}$

13.(3) 隨機變數 X , Y 滿足 $E(X|Y=y) = 2y$, $E(Y) = 1$, $\text{Var}(X|Y=y) = 4y$, $\text{Var}(Y) = 1$ 。

求 $\text{Var}(X)$

- (1) 10 (2) 11 (3) 12 (4) 13

14.(2) 500 對夫妻之月薪如下表：

妻子之月薪	丈夫之月薪	
	低於三萬	三萬或更高
低於三萬	183	95
三萬或更高	15	207

500 對夫妻中任意抽取一對，請問夫妻兩人的月薪資均低於三萬的機率為何？

- (1) 0.183 (2) 0.366 (3) 0.207 (4) 0.414

15.(1) 若某隨機變數 X 之機率密度函數(pdf)可以寫成 $f(x) = c \cdot \exp\left(-\frac{(x-3)^2}{10}\right)$ ，請問此隨機變數之平均數為何？

- (1) 3 (2) 5 (3) 10 (4) 30

16.(1) 若 $\psi_X(t) = \ln M_X(t)$ ，其中 $M_X(t)$ 為隨機變數 X 之動差生成函數(moment generating function)在 $-h < t < h$ 存在，請問 $\psi'(0)$ 為何？

(1) 平均數 (2) 中位數 (3) 眾數 (4) 變異數

17.(1) 若隨機變數 Z 具指數分配，其變異數為 1。請問 $P[Z > E(Z)] = ?$

(1) e^{-1} (2) $e^{-0.5}$ (3) $1 - e^{-1}$ (4) $1 - e^{-0.5}$

18.(1) 若隨機變數 X 、 Y 之聯合機率分配函數為 $f_{XY}(x, y) = cx|y|$, $0 < x < 1, -1 < y < 1$ ，請問 X 與 Y 之關係性為何？

(1) 不相關 (2) 正相關 (3) 負相關 (4) 相關係數之絕對值接近 1

19.(2) 某選修課程之修課人數為隨機變數，具卜瓦松分配(Poisson distribution)平均數為 64 人。若修課人數達 80 人，學校即將拆為兩班。請問拆班的機率為何？

(1) 0 (2) 0.0228 (3) 0.235 (4) 0.8

20.(4) 若 X 、 Y 為獨立之隨機變數， $M_X(t)$ 、 $M_Y(s)$ 分別為兩者之動差生成函數(moment generating function)。令 $Z = X + Y$ ，請問 Z 之動差生成函數 $M_Z(r)$ 為何？

(1) $M_Z(r) = M_X(t) + M_Y(s)$

(2) $M_Z(r) = M_X(r) + M_Y(r)$

(3) $M_Z(r) = M_X(t) \cdot M_Y(s)$

(4) $M_Z(r) = M_X(r) \cdot M_Y(r)$

21.(2) 若某隨機變數 S 之機率密度函數(probability density function)可以寫成

$$f_S(s) = \begin{cases} \alpha + \beta s, & 0 < s < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \text{ 已知 } E(S) = 0.6 \text{。求 } P(S < 0.5) = ?$$

(1) 0.18 (2) 0.35 (3) 0.5 (4) 0.8

22.(2) 隨機變數 T 之機率分配如下：

t	-1	0.3	1.7
機率	0.2	0.3	0.5

若 $F_T(t) = P(T \leq t)$ 為 T 之累積機率分配函數(cumulative distribution function)，求

$F_T(0)$ 之值為何？

- (1) 0 (2) 0.2 (3) 0.3 (4) 0.5

23.(4) 請問 $\frac{P(A|C)}{P(B|C)}$ 與下列何者等值？

- (1) $\frac{P(C)}{P(A)} \times \frac{P(B|C)}{P(B|A)}$ (2) $\frac{P(C)}{P(B)} \times \frac{P(B|C)}{P(A|B)}$ (3) $\frac{P(C)}{P(B)} \times \frac{P(B|C)}{P(A|B)}$ (4) $\frac{P(A)}{P(B)} \times \frac{P(C|A)}{P(C|B)}$

24.(1) 若隨機變數 X 具二項分配 $n = 10, p = 0.2$ ，令 $Y = 10 - X$ 。請問下列何者為真？

- (1) $P(X < 2) = P(Y \geq 9)$
 (2) $P(X < 2) = 1 - P(Y \geq 9)$
 (3) $P(X < 2) = P(Y \geq 8)$
 (4) $P(X < 2) = 1 - P(Y \geq 8)$

25.(2) 若隨機變數 T 之機率函數為 $P(T = t) = 0.3(0.7)^{t-1}, t = 1, 2, \dots$ ，請問下列何者為真？

- (1) $P(T \geq 8 | T \geq 5) = P(T \geq 3)$
 (2) $P(T > 8 | T > 5) = P(T > 3)$
 (3) $P(T \leq 8 | T \geq 5) = P(T \leq 3)$
 (4) $P(T < 8 | T > 5) = P(T < 3)$

26.(3) A, B 為兩事件，已知 $P(A) = 0.6, P(B) = 0.4, P(A^c \cap B^c) = 0.24$ ，其中 A^c 表示 A 事件之餘事件(complement event)，請問下列何者為真？

- (1) A, B 為兩互斥事件
 (2) A, B 為兩相依事件
 (3) A, B 為兩獨立事件
 (4) A, B 為兩互斥且獨立事件

27.(3)下列敘述何者正確？

- a. 若 $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.7$, 則 $P(A \cap B) \geq 0.2$ 。
- b. 若 $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.7$, 則 A 與 B 不可能互斥(disjoint)。
- c. 若 $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.7$, $P(A \cup B) = 0.9$, 則 $P(A^c \cup B^c) = 0.6$ 。

(1) a (2) c (3) a, b (4) a, c

28.(2)若 A 與 B 獨立, 且 $P(A) = 0.8$, $P(A \cap B^c) = 0.6$, 則 $P(B)$ 為何?

(1) 0.20 (2) 0.25 (3) 0.30 (4) 0.35

29.(4)下列敘述何者錯誤？

- a. 若 A 與 B 獨立, 則 A^c 與 B 獨立。
- b. 若 $P(A)P(B) \neq 0$, 且 A 與 B 為兩互斥事件, 則 A 與 B 獨立。
- c. 若 A 與 B 獨立, B 與 C 獨立, A 與 C 獨立, 則 A 與 B 與 C 互為獨立(mutually independent)。

(1) a (2) b (3) a b (4) b, c

30.(2)今有三人玩投擲骰子的遊戲, 每人各投擲一枚均勻的六面骰子。若其中一人投擲的點數與其他兩人的點數不同, 則遊戲結束。不然, 三人再繼續重新玩投擲骰子的遊戲。試問此遊戲會在第一回合就結束的機率為何?

(1) 5/6 (2) 35/36 (3) 205/216 (4) 215/216

31.(1)某國家的選民有 28% 將自己歸為保守派選民, 31% 歸為自由派選民, 41% 歸為中間選民。在最近的總統選舉裡, 18% 的保守派選民, 92% 的自由派選民與 55% 的中間選民將選票投給了總統當選人。若某位選民將選票投給了總統當選人, 試問該選民為保守派選民的機率為何?

(1) 0.0898 (2) 0.1286 (3) 0.1368 (4) 0.1586

32.(1)若隨機變數 X 的累積分布函數(cumulative distribution function)為

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.7 + 0.02x & 0 \leq x < 10 \\ 1 & x \geq 10 \end{cases}$$

試問隨機變數 X 的變異係數(coefficient of variation)為何?

(1) 3.1358 (2) 3.3586 (3) 3.7268 (4) 3.9838

33.(1) 若隨機變數 X 的動差生成函數為 $M_X(t) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4-t}$ 。試問下列何者為 X 的中位數與平均數之和?

- (1) $\frac{1}{16}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) 1 (4) 不存在

34.(4) 令 $f(x) = \frac{1}{5} \left(1 - \frac{|x-7|}{5} \right)$, $2 < x < 12$ 。試問何者為 X 的第 80 百分位數?

- (1) 7.6358 (2) 7.9853 (3) 8.3968 (4) 8.8377

35.(3) 設在五個大都會區一年發生芮氏規模六級以上地震之次數為獨立且相同的卜瓦松(Poisson)分配，每個大都會區平均每 20 年有一次。若從現在開始計時，在這五個大都會區之中，最早發生芮氏規模六級以上地震的時間點會在 10 年之內的機率為何?

- (1) 0.63222 (2) 0.72933 (3) 0.91792 (4) 0.95021

36.(2) 下列敘述何者錯誤?

- $P(X > Y) = 1$ 若且唯若 $E(X) > E(Y)$ 。
- 若給定兩隨機變數 X, Y 的聯合機率密度函數 $f_{X,Y}(x, y)$ ，便可求得 X, Y 的邊際機率密度函數 $f_X(x)$ 與 $f_Y(y)$ 。
- 若給定兩隨機變數 X, Y 的邊際機率密度函數 $f_X(x)$ 與 $f_Y(y)$ ，便可求得 X, Y 的聯合機率密度函數 $f_{X,Y}(x, y)$ 。

- (1) a, b (2) a, c (3) b, c (4) a, b, c

37.(4) $f_{X,Y}(x, y) = 3(x + y)$, $0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < x + y < 1$ 。

試問 $P(X + Y < 0.5)$ 為何?

- (1) $\frac{1}{12}$ (2) $\frac{2}{25}$ (3) $\frac{3}{25}$ (4) $\frac{1}{8}$

38.(3) $f_{X,Y}(x, y) = \frac{10!}{x! y! (10-x-y)!} (0.3)^x (0.5)^y (0.2)^{10-x-y}$, $x, y = 0, 1, \dots, 10$, 且 $x + y \leq 10$

試問 X 與 Y 的相關係數 $\rho_{X,Y}$ 為何?

- (1) -0.32733 (2) -0.50000 (3) -0.65465 (4) -0.76376

39.(3) 設 Z_1, Z_2 為兩個獨立的標準常態分配 $N(0, 1)$ 。下列敘述何者為正確?

- $Z_1 - Z_2$ 與 $Z_1 + Z_2$ 為獨立且相同分配
- $\frac{Z_1 - Z_2}{\sqrt{(Z_1 + Z_2)^2}}$ 之均數為 0，亦即 $E\left(\frac{Z_1 - Z_2}{\sqrt{(Z_1 + Z_2)^2}}\right) = 0$

c. $\left(\frac{Z_1 - Z_2}{\sqrt{2}}\right)^2$ 之變異數為 2

- (1) a, b (2) b, c (3) a, c (4) a, b, c

40.(2) 某保險一年總理賠的金額為 $S_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ ，其中 N 為一年所發生理賠的件數， X_1, X_2, X_3, \dots 為獨立且相同分配之理賠金額。若理賠件數 N 的動差生成函數為

$M_N(t) = \frac{0.2e^t}{1-0.8e^t}$ ，而理賠金額 X_i 的機率密度函數 $f_X(x) = \frac{1}{500}e^{-x/500}$ ， $0 < x < \infty$ 。下列何

者為 S_N 的變異係數(coefficient of variation)？

- (1) 0.825 (2) 1.000 (3) 1.158 (4) 1.168