C4 壽險數學與數理統計

選擇題 30 題:

(第 5、9、12、13、17、18、19、24、25、29 題:每題 4 分，其餘 20 題:每題 3 分)

1.(3)令 0 至 t 期間發生危險事件所造成累計損失為$S(t) = X_1 + X_2 + \cdots + X_{N(t)}$即服從複合式普瓦松(Compound Poisson)隨機過程，其中 0 至 t 期間發生危險事件數 N(t)服從普瓦松(Poisson)分配，平均值為 $\int_0^t \lambda(t)dt$，且 λ(t)=10;每一危險事件所造成的損失X_{i}均服從指數(Exponential)分配，平均值$\theta = 20$，請問$\mathrm{Var}[S(5)]$值為何?

(1) 20,000 (2) 35,000 (3) 40,000 (4) 45,000

2.(4)假設每小時男、女性顧客到達銀行櫃檯請求服務的數目，分別服從強度$\lambda = 6$ 、$\lambda = 12$ 的卜瓦松(Poisson)分配，計算至少 2 名顧客(不分性別)在 5 分鐘內到達的機率值介於下列哪個區間內

(1) (0.1,0.2) (2) (0.2,0.3) (3) (0.3,0.4) (4) (0.4,0.5)

3.(3) 每週家庭移民至歐洲的人數，服從強度$\lambda = 2$的卜瓦松(Poisson)分配，假設每一家庭人數是彼此獨立，並且家庭人數為1,2,3,4 人的機率值分別為$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{8}$。試問在一個月(4 週)內個別移民至歐洲人數的 (期望值,標準差)為多少？(取至整數)

(1) (10,37) (2) (10,386) (3) (15,37) (4) (15,38)

4.(3)小琳每日由家步行 10 分鐘到捷運站，再搭捷運上班。為了能夠準時到達辦公室，小琳必須在上午 7 點 50 分以前搭上捷運。若捷運到站為每 8 分鐘一班的普瓦松過程(Poisson process)，試求小琳能夠至少 90%準時上班之最晚離開家的時間？

(1) 7 點 31 分 (2) 7 點 32 分 (3) 7 點 21 分 (4) 7 點 22 分

(4 分)

5.(1)計程車載客抵達車站的車次服從普瓦松分配(Poisson distribution)，平均每小時 10 車次。每輛計程車載客人數相互獨立，且

載客人數	機率
1	0.6
2	0.3
3	0.1

利用近似常態分配，計算 72 小時內，計程車載客至少 1,050 人抵達車站之機率。

(1) 0.75 (2) 0.70 (3) 0.65 (4) 0.60

6.(4)令$X_1, X_2, \cdots, X_n$服從伽瑪(Gamma)分配，即$\Gamma(\alpha = 4, \beta)$，其中$\beta$為未知參數，$x_i$的機率密度公式$f(x_i, \alpha, \beta) = \frac{1}{(\alpha-1)!\,\beta^{\alpha}} {x_i}^{\alpha-1} e^{-x_i/\beta}$，假設$\sum_{i=1}^{n} x_i = 10$，請問$\beta$的最大概似估計值(MLE)為何?

（1）40（2）20（3）5（4）2.5

7.(1)令 X 服從二項(Binomial)分配，即$\mathrm{Bin}(n, p)$，其中$n = 10$，並且 p 可能為 0.5 或 0.75。在簡單假設檢定下，假設當 X 小於或等於 2 時，將拒絕H_0: $p = 0.5$，並且接受H_1: $p = 0.75$，請問該假設檢定的信賴水準(α)為何(小數點第二位採四捨五入)?

（1）0.05（2）0.25（3）0.04（4）0.02

8.(3) 設隨機變數$X_1, \cdots, X_n$具有機率值:$P[X_i = 1] = p$，$P[X_i = 0] = 1 - p$。

假設先驗分佈 p (prior distribution)服從 Beta(2, 3)，令$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$，

損失函數(loss function)為$l(p, t) = (p - t)^2$，求貝氏估計量(Bayes estimator)？

(1) $\frac{n+5}{y+2}$ (2) $\frac{n+4}{y+1}$ (3) $\frac{y+2}{n+5}$ (4) $\frac{y+1}{n+4}$

(4 分)

9.(2) 自台北市民中隨機抽訪 1000 人，研究其是否贊同公眾運輸票價加價以改善交通服務品質。若此 1000 人中有 550 人至 650 人贊同，則認為有 60%的贊同率(此設為虛無假設)，求型 I 誤差之機率值 α 及如果僅有 500 人贊同時型 II 誤差 β 之機率值，則下列敘述何

者正確？(常態分配表 $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}dt$ ，$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$:

$\Phi(3.15)=0.999184$ ，$\Phi(3.16)=0.999211$，$\Phi(3.17)=0.999238$，

$\Phi(3.18)=0.999264$ ，$\Phi(3.19)=0.999289$，$\Phi(3.20)=0.999313$，

$\Phi(3.21)=0.999336$，$\Phi(3.22)=0.999359$，$\Phi(3.23)=0.999381$，

$\Phi(3.24)=0.999402$)

(1) $(\alpha,\beta)=(0.001282, 0.000762)$
(2) $(\alpha,\beta)=(0.001238, 0.000789)$
(3) $(\alpha,\beta)=(0.001238, 0.000762)$
(4) $(\alpha,\beta)=(0.001282, 0.000789)$

10.(1) 假設台北市市民大道道路去年發生 8 次車禍，過去幾年的平均是每年 5 次，若說去年較往年的情形壞，設顯著水準 α 為 0.05，請以 Poisson 分配計算其 p 值(p-value)？(Poission 分配表，$\Lambda(k,\lambda)=\sum_{j=0}^{k}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^j}{j!}$: $\Lambda(5,8)=0.1912$ ，

$\Lambda(8,5)=0.9319$ ，$\Lambda(5,7)=0.3007$ ，$\Lambda(7,5)=0.8666$)

(1)0.1334 (2)0.06810 (3) 0.8088 (4)0.6993

11.(1)已知母體為

$$1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3$$

10 個數字，自該母體中以歸還抽樣法，取 $n=2$ 為一組樣本求樣本平均數的變異數。

(1) 0.4 (2) 0.6 (3) 0.8 (4) 1.0

(4 分)
12.(4)設 $Y_1<Y_2<Y_3<Y_4<Y_5$ 表機率密度函數為

$$f(x,\theta)=\frac{1}{\theta}\;0<x<\theta, 0<\theta<\infty$$

中一隨機樣本為 5 之有序統計量(order statistics)，則何者是 θ 的不偏估計量？

(1) $\frac{Y_3}{4}$ (2) $\frac{Y_3}{2}$ (3) Y_3 (4) $2Y_3$

(4 分)

13.(1)已知

- 給定λ，理賠次數服從參數λ的 Poisson 分配。
- λ的機率密度函數為

$$\pi(\lambda)=\frac{1}{\lambda^2},\lambda>1$$

若被保險人第 1,2,3 年的理賠次數分別為 2,0,0，試算後驗分配的期望值。

(1) $\frac{4}{3}$ (2) $\frac{3}{4}$ (3) $\frac{5}{4}$ (4) $\frac{4}{5}$

14.（ 4 ）假設第 30+t 歲的死亡力函數 μ_{30+t}如下:

$$\mu_{30+t}=\frac{1}{100+t}$$

，請問${}_{10}p_{30}$為何?

（1）0.7543（2）0.9958（3）0.8756（4）0.9091

15.(2) 假設今天天氣是否下雨由最後二天天氣決定。今過去二天都下雨則明天會下雨的機率是 0.8；今天下雨昨天沒下雨則明天會下雨的機率為 0.3；昨天下雨今天沒下雨則明天會下雨的機率為 0.2；過去二天都沒下雨則明天會下雨的機率為 0.5。上述情況可以使用 4 狀態馬可夫鏈(four-state Markov chain)來分析，其轉移機率矩陣(transition probability matrix)為 $\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$，則下列敘述何者正確？

(1) $(a,b,c,d)=(0, 0.8, 0, 0.2)$

(2) $(a,b,c,d)=(0.8, 0, 0.2, 0)$

(3) $(e,f,g,h)=(0, 0.3, 0, 0.7)$

(4) $(e,f,g,h)=(0.3, 0.7, 0, 0)$

16.(3) 死亡率研究中常見的 Gompertz 模型，是假設死力(force of mortality)為年齡的函數：$\mu_x = BC^x$ ，$B>0$，$C>1$為 Gompertz

模型的參數，x 為年齡。設 x 歲之人下年度仍生存之機率為 P_x，

計算 $\dfrac{\log P_{x+1}}{\log P_x}$ 之值?

(1) 小於 0 (2) 大於 0，小於 1 (3)大於 1 (4) 以上皆錯

(4 分)

17.(2) 已知 50 歲以上已婚者之死力(force of mortality)為單身者之一半，假設已婚者 x 歲生存人數 $l_x = 10000(75-x), 0 \le x < 75$，今有獨立之 65 歲已婚者與 55 歲單身者，求 $\mathring{e}_{65:55}$

(1)3 (2) 3.5 (3) 4.0 (4) 4.5

(4 分)

18.(3) 50 歲人投保終身險，只有二種脫退因子(一為癌症死亡，另一為其他原因死亡)，使他終止保險，已知 $\mu_{x+t}^{(1)} =$

$\dfrac{1}{100-x-t}, 0 < t < 10-x$，$\mu_{x+t}^{(2)} = \dfrac{2}{100-x-t}, 0 < t < 10-x$。求 50 歲人在 10 年內死亡之機率

(1)0.47 (2)0.48 (3) 0.49 (4) 0.50

(4 分)

19.(4)假設一 4 狀態馬可夫鏈(4-state Markov chain)並且

$$\mu_t^{01} = 0.2, \mu_t^{12} = 0.1, \mu_t^{03} = 0.02, \mu_t^{13} = 0.03, \mu_t^{23} = 0.05$$

計算時間 0 由狀態 0 到達狀態 1 之後並於時間 5 之前離開狀態 1 之機率。

(1) 0.1745 (2) 0.1786 (3) 0.1822 (4) 0.1861

20.(2)假設 1,000 名 50 歲的存活函數(survival function)如下：

$${}_t p_{50} = \frac{20-\sqrt{t}}{20}, t < 400$$

利用近似常態分配，計算 50 歲存活 30 年人數的 95 分位數(95th percentile)。

(1) 744　(2) 749　(3) 754　(4) 759

21.(　3　)假設

- $q_x = 0.1$
- $q_y = q_x$
- $\mu_{y+t} = 2\mu_{x+t} - k, 0 \le t \le 1$

試決定 k 。

(1) 0.101　(2) 0.103　(3) 0.105　(4) 0.107

22.(　1　)假設 $p_x = 0.82$ 及 UDD 假設之下，計算 ${}_{0.5}p_{x+0.5}$

(1) 0.9011　(2) 0.9025　(3) 0.9036　(4) 0.9040

23.(　4) 在下列已知假設前提下:

(A) $\ddot{a}_{35} = 15.4$

(B) $\ddot{a}_{65} = 9.9$

(C) ${}_{30}\mathrm{E}_{35} = 0.14$

，試算 $\ddot{a}_{35:\overline{30|}}$ 為何？

(1) 13.2 (2) 14.6 (3) 14.52 (4) 14.01

(4 分)

24.(3) 一張車險保單初始保費 500 元，每年保費根據出險理賠次數調整保費金額，調整方法如下: (1)目前保費 500 元若全年沒有出險理賠則隔年保費仍維持 500 元，若出險理賠 1 次則隔年保費調整為 1000 元，若出險理賠 2 次以上則隔年保費調整為 1500 元；(2)目前保費 1000 元若全年沒有出險理賠則隔年保費降為 500 元，若出險理賠 1 次則隔年保費調整為 1500 元，若出險理賠 2 次以上則隔年保費調整為 1500 元；(3)目前保費 1500 元若全年沒有出險理賠則隔年保費降為 1000 元，若出險理賠 1 次則隔年保費調整為 1500 元，若出險理賠 2 次以上則隔年保費調整為 1500 元。今有一人其理賠次數機率值分別為：理賠 0 次機率值為 0.7，理賠 1 次機率值為 0.2，理賠 2 次以上機率值為 0.1，求在利率 2%之下此人三年保費的精算現值？(取至整數)

(1) 1920　(2) 1921　(3) 1922　(4) 1923

(4 分)

25.(2) 有 100 位現年 x 歲人投保二種終身險，每年初繳保費至死亡為止，死亡年末給付。其中投保 A 類有 70 人，保額 1 元，每人每年保費 0.048；投保 B 類有 30 人，保額 4 元，每人每年保費 0.192。已知 $A_x = 0.4$，${}^2A_x = 0.2$，保險公司對此 100 人之總損失為 L，以利率 d =0.06 計算，求該保險公司獲利大於 20 元之機率

$P[L < -20]$？(常態分配表 $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt$，

$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$: $\Phi(0.55) = 0.708840$，$\Phi(0.56) = 0.712260$，

$\Phi(0.57) = 0.715661$，$\Phi(0.58) = 0.719043$，$\Phi(0.59) = 0.722405$，)

(1)小於 0.284 (2)大於 0.284、小於 0.288 (3) 大於 0.288 (4)以上皆錯

26.(4)假設 x 歲保額 1,000 元的終身壽險如下：

- 保費 22.99 於每年年初支付
- 死亡保障於死亡發生的年末支付
- $A_{x+10} = 0.425$
- 10 年末的純保費準備金 160.58
- $q_{x+9} = 0.008$

試計算 9 年末的純保費準備金。

(1) 137.26 (2) 134.78 (3) 136.56 (4) 135.94

27.(3)假設一 3 狀態離散型馬可夫鏈(3-state discrete Markov chain)，其中狀態 0 表示健康，狀態 1 表示失能，狀態 2 表示死亡，並且

$$p^{01} = 0.1,\ p^{02} = 0.1,\ p^{10} = 0.3,\ p^{12} = 0.1,\ p^{2i} = 0, i = 0,1$$

考慮以下失能保險

- 對於年初為失能狀態被保險人，年底支付失能給付 1,000 元。
- 保險期間為 4 年。
- 健康狀態時收取保費。
- v=0.95

試計算在時間 0 健康狀態者的年繳保費。

(1) 125.32 (2) 129.11 (3) 116.52 (4) 110.69

28.(1)某甲 35 歲購買一終身保險(whole life insurance)，其內容如下：

- 死亡保障 1,000 萬元

- 死亡保障於死亡發生的年末支付
- 保費及費用於年初支付
- $i = 0.06$
- 費用支付表

	保費基礎(per premium)	保單基礎(per policy)
第一年度	90%	20 萬元
續年度	10%	3 萬元

試根據等價原則(equivalence principle) 及附表計算總保費。

(1) 14.7011 萬元 (2) 15.8012 萬元 (3) 16.6123 萬元 (4) 17.2657 萬元

(4 分)

29.(4)小明及小華分別為 40 歲及 39 歲，要購買一終身壽險，保費計算依據相同的生命表及 $i = 6\%$ 。若小明購買保額 1,000 萬元的終身保險，死亡給付為年底支付，保費為每年初繳交，其年繳純保費 9.85 萬元。假設 $q_{39} = 0.003$，試計算小華購買一相同的終身保險的年繳純保費。

(1) 9.20 萬元 (2) 9.28 萬元 (3) 9.32 萬元 (4) 9.39 萬元

30.(3)考慮一 3 年期的癌症險，其保險給付的設計為癌症首次發生於該年底給付 1,000 萬元，假設 $i = 10\%$ ，投保年齡 x 歲之人未來的癌症發生率如下

$$q_x^c = 0.1, q_{x+1}^c = 0.2, q_{x+2}^c = 0.3$$

若癌症的發生是唯一的風險，試利用等價原則(equivalence principle)計算每年期初繳之年繳純保費。

(1) 156.96 萬元(2) 161.78 萬元(3) 166.56 萬元 (4) 171.23 萬元