C1 機率

選擇題 40 題：(每題 2.5 分)

1.(3) 假設 $X_i, i=1,2,\cdots,n$ 為具有連續分佈函數(distribution function) F 之獨立隨機變數，求隨機變數 $(n+1)F(X_{(1)})$ 期望值，其中 $X_{(1)}$ 為最小順序統計量(order statistics)。

(1) $\frac{1}{n}$ (2) $\frac{1}{n+1}$ (3) 1 (4) $\frac{n}{n+1}$

2.(4) $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 來自 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的順序統計量(order statistics)，其中 Y_1 為最小，Y_n 為最大。假設 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互獨立且機率密度函數(probability density function)為

$$f(x) = 2e^{-2x}, x > 0$$

令

$$W_i = Y_i - Y_{i-1}, i = 2,3,\cdots,n.\ W_1 = Y_1$$

求 $n=3, E(Y_3)$ 之值

(1) $\frac{8}{12}$ (2) $\frac{9}{12}$ (3) $\frac{10}{12}$ (4) $\frac{11}{12}$

3.(2) 假設 $X_i, i=1,2,3$ 為獨立隨機變數滿足 X_i 有連續且嚴格遞增分配函數(distribution function) F_i。令 $W_i = F_i(X_i), i=1,2,3$，試求 $-2\sum_{i=1}^{3}\log(1-W_i)$ 期望值。

(1) 3 (2) 6 (3) 9 (4) 12

4.(3) 假設隨機變數 X 為服從均勻分佈 $U(0,1)$，令 $Y=\log(X)$，若 $Y_i, i=1,2,3$ 為獨立隨機變數且和 Y 分配相同，求 $-\sum_{i=1}^{3} Y_i$ 的期望值。

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

5.(3) 假設 $X_i, i=1,2,\cdots,n$ 為期望值 μ，變異數 100 之獨立相同分配隨機變數。若 n =10,000 求 k 滿足 $P_r(|\overline{X}_n - \mu| \le k) = 0.9$。

(1) 0.129 (2) 1.29 (3) 0.1645 (4) 1.645

6.(2) 一汽車電池壽命為隨機變數 X 且機率密度函數 $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x>0, \lambda = 0.001$。另一電池壽命隨機變數 Y 的分配與 X 相同且獨立，試求 $P(X+Y \ge 1000)$ 之機率值(四捨五入取至小數以下一位)

(1) 0.6 (2) 0.7 (3) 0.8 (4) 0.9

7.(1) 假設隨機變數 X,Y,Z 的聯合機率密度函數

$$f(x,y,z)=cxyz, 0<x,y,z<1, c>0$$

試求滿足此三個隨機變數獨立之 c 值為何？

(1) 8 (2) 27 (3) 64 (4) 125

8.(3) 若隨機變數 X 動差生成函數(moment generating function)存在且滿足 $EX^{2k}=\dfrac{2k!}{2^{2k}k!}$，$EX^{2k+1}=0$，$k=0,1,2,\cdots$ 請問 X 之分配為何？

(1) 平均數 2 指數分配 (2) 平均數 0.5 指數分配

(3) 平均數 0 變異數 0.5 常態分配 (4) 標準常態分配

9.(3) 假設隨機變數 $X_i, i=1,2,3$ 之聯合機率密度函數為

$$f(x_1,x_2,x_3)=8e^{-2(x_1+x_2+x_3)}, 0<x_i, i=1,2,3<\infty$$

試求 $E(X_1^2X_2X_3)$

(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{8}$ (4) $\frac{1}{16}$

10.(1) 隨機變數 Y 分配服從卜瓦松分配 $Poisson(10)$，假設給定 $Y=n$ 後隨機變數 X 分配服從二項分配 $B(n,0.5)$，則隨機變數 X 服從卜瓦松分配，試求其參數值。

(1) 5 (2) 10 (3) 15 (4) 20

11.(4) 假設一群人壽命 X 為具有平均數 20 指數分配的隨機變數，求這群體中一個人壽命超過 80 歲的機率 (四捨五入取至小數以下 3 位)

(1) 0.015 (2) 0.016 (3) 0.017 (4)0.018

12.(3) 假設隨機變數 X 為具有參數 $\lambda>0$ 的卜瓦松分佈，若 $P(X=1)-P(X=2)=0$，求 λ 值

(1) 0.5 (2) 1 (3) 2 (4) 3

13.(4) 當人們已知他們有或是沒有糖尿病時，某項診斷的精確度是 85%。若 1000 人中有 5 人有糖尿病，試求若測試有糖尿病時，而實際上真的有糖尿病的機率。(四捨五入取至小數以下 3 位)

(1) 0.025 (2) 0.026 (3)0.027 (4) 0.028

14.(4) 若隨機變數 X 具平均數為 4 之指數分配(exponential distribution)；隨機變數 Y 具 $(n=2, p=0.8)$ 之二項分配(binominal distribution)，求 $E(X\cdot Y^2)$ 之值。

(1) 6.43 (2) 7.68 (3) 9.65 (4) 10.88

15.(2) 若 $X_1, X_2, \cdots, X_{100}$ 來自 $U(-6, 6)$之隨機樣本，其樣本平均為 $\overline{X}$ ；$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{100}$ 為源自 $U(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ 之隨機樣本，其樣本平均為 $\overline{Y}$ 。利用中央極限定理(central limit theorem)求 $P(\overline{X}-\overline{Y}>1)$ 之值。

(1) 0.0050 (2) 0.0062 (3) 0.1131 (4) 0.2389

16.(3) 若隨機自一副撲克抽取兩張牌，抽出不放回，請問第二張為紅牌之機率為何？
(1) 0.3 (2) 0.4 (3) 0.5 (4) 0.6

17.(2) 假設某火車站火車誤點的次數以卜瓦松分配(Poisson distribution)描述，平均一年 12 次誤點。請問該站火車兩次誤點時間之間距超過三個月的機率為何？
(1) 0.0256 (2) 0.0498 (3) 0.1353 (4) 0.3679

18.(3) 已知 $P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{1}{3}, P(A|B)=\frac{1}{6}$ ，求 $P(A\cup B)$ 。

(1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{3}{4}$ (3) $\frac{7}{9}$ (4) $\frac{8}{9}$

19.(2) 已知隨機變數 X 具對稱之機率分配，平均數為 100，標準差 50，請估計 $P(X\geq 200)$ 的上限？
(1) 0.0228 (2) 0.1250 (3) 0.2500 (4) 0.3750

20.(4) 若隨機變數 N 具卜瓦松機率分配(Poisson distribution)，其平均數為 2。請問 $E(N|N\geq 2)$ 為何？
(1) 2.1256 (2) 2.3711 (3) 2.5812 (4) 2.9114

21.(4) 隨機變數 X 具珈瑪分配(gamma distribution)，其機率密度函數為

$$f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}}x^{\alpha}e^{-x/\theta}, \quad 0<x<\infty$$

請問 $E(X^4)$ 為何？
(1) $\alpha\theta$ (2) $\alpha(\alpha+1)\theta^2$ (3) $\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\theta^3$ (4) $\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\theta^4$

22.(1) 若隨機變數 T 具指數分配(exponential distribution)，若 $a>0$，請問 $P(T>3)$與 $P(T>3+a|T>a)$之關係，下列何者為真？

(1) $P(T>3)=P(T>3+a|T>a)$ (2) $P(T>3)>P(T>3+a|T>a)$

(3) $P(T>3)<P(T>3+a|T>a)$ (4) 視 a 值之大小而決定

23.(3) 若隨機變數 X 具二項分配 (n,p)，令 $Y=n-X$，請問下列敘述為真？

(1) $E(X)=E(Y)$ (2) $E(X)>E(Y)$ (3) $Var(X)=Var(Y)$ (4) $Var(X)>Var(Y)$

24.(4) 隨機變數 X 為伯努力(Bernoulli distribution)隨機變數，參數為 0.4；Y 為伯努力(Bernoulli distribution)隨機變數，參數為 0.7，請問 $Var(XY)$ 為何？

(1) 0.0504 (2) 0.0840 (3) 0.1680 (4) 0.2016

25.(2) 若某骰子其點數出現之機率與其點數成反比，求出現「三點」之機率為何？

(1) 0.0857 (2) 0.1361 (3) 0.1429 (4) 0.3333

26.(4) 若某人三餐攝入的卡洛里數具常態分配，且獨立。假設早餐、午餐、晚餐之平均數分別為 500 大卡、600 大卡及 800 大卡，標準差分別為 50 大卡、60 大卡及 80 大卡。請問此人某天三餐攝入的總卡洛里數超過 1800 大卡的機率為何？

(1) 0.1867 (2) 0.3015 (3) 0.6985 (4) 0.8133

27.(3) 若隨機變數 X,Y 之聯合機率函數為 $f(x,y)=c(6-x-2y),\quad x=0,1,2,\quad y=0,1$。請問 $P(Y=1)$ 為何？

(1) 0.250 (2) 0.333 (3) 0.375 (4) 0.625

28.(3) 若隨機變數 X 具有機率密度函數 $f(x)=\begin{cases}0.5e^{x}, & x\le 0\\ 0.5e^{-x}, & x>0\end{cases}$，請問當 $x\ge 0$，$P(|X|>x)$ 為何？

(1) $0.5(e^{x}-e^{-x})$ (2) $e^{x}-e^{-x}$ (3) e^{-x} (4) e^{x}

29.(4) 若隨機變數 X 具常態分配，平均數為 2，變異數為 16。請問 $P(e^{X}>1)$ 之值為何？

(1) 01352 (2) 0.3185 (3)0.5238 (4) 0.6915

30.(4) 若隨機變數 X 之累積機率分配為 $F(x)=1-e^{-2x}, x\ge 0$，請問 $P(1\le e^{X}\le e)$ 之值為何？

(1) e^{-1} (2) $1-e^{-1}$ (3) e^{-2} (4) $1-e^{-2}$

31.(1) 若台灣的有感地震發生之間隔時間為指數分配，平均為 10 天。請問未來 30 天無有感地震之機率為何？

(1) e^{-3} (2) e^{-2} (3) $1-e^{-2}$ (4) $1-e^{-3}$

32.(3) 若全校性英文測驗之成績具常態分配，平均數 65 分，標準差 5 分。任意詢問 2 位同學，請問這兩位同學的成績均達到 60 分的機率為何？

(1) 0.0252 (2) 0.1587 (3) 0.7078 (4) 0.8413

33.(4) 下列敘述何者正確？

a. 若$\mathrm{P}(\mathrm{A}^C|B)=\mathrm{P}(\mathrm{A}^C)$，則$\mathrm{P}(\mathrm{B}^C|A)=\mathrm{P}(\mathrm{B}^C)$。

b. 若$\mathrm{P(A)P(B)}\neq 0$，且$\mathrm{P(A\cup B)=P(A)+P(B)}$，則$\mathrm{P}(\mathrm{A}^C|B)\neq \mathrm{P}(\mathrm{A}^C)$。

c. $\mathrm{P(A\cap B)}\ \geq 1-\mathrm{P}(A^c)-\mathrm{P}(B^c)$。

(1) a, b (2) b, c (3) a, c (4) a, b, c

34.(2) 若隨機變數 X 的累積分配函數(cumulative distribution function)為

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 0.8+0.005x & 0\leq x<20 \\ 1 & x\geq 20 \end{cases}$$

試問隨機變數 X 的變異係數(coefficient of variation)為何?

(1) 2.1268 (2) 2.2194 (3) 2.3625 (4) 2.6237

35.(3) 若隨機變數 X 的動差生成函數(moment generating function)為$\mathrm{M}_X(\mathrm{t})=\frac{2}{5}+\frac{3}{5-t}$。若 a 為 X 的平均數 b 為 X 的中位數， 試問下列何者為 X 的平均數與中位數之差$(a-b)$?

(1) -0.20156 (2) -0.21736 (3) -0.23835 (4) -0.24371

36.(4) 設X_1,X_2,X_3分別為某保險在三個地區一年內發生理賠之件數，理賠件數為獨立且相同的分配，其理賠件數之動差生成函數(moment generating function)為$\mathrm{M}_X(\mathrm{t})=\frac{0.9}{1-0.1e^t}$。試問一年內這三個地區合計發生理賠之件數**不超過** 3 件的機率為何?

(1) 0.0073 (2) 0.0377 (3) 0.9623 (4) 0.9987

37.(4) 下列敘述何者正確?

a. 負二項分配是特定的二項分配。

b. 負二項分配的均數必大於或等於變異數。

c. 若隨機變數 X 為幾何分配，則$\mathrm{P(X\geq m+n\mid X\geq m)=P(X\geq n)}$，$\mathrm{m,n}=0,1,2,\ldots$。

d. 若隨機變數 Y 為指數分配，則$\mathrm{P(Y\geq s+t\mid Y\geq s)=P(Y\geq t)},\ s>0,t>0$。

(1) a, b (2) b, c (3) b, d (4) c, d

38.(2) 設X_1, X_2, X_3, X_4, X_5分別為某保險在五個不同地區一年內發生理賠之件數。這五個地區之理賠件數為獨立的隨機變數，其理賠件數之動差生成函數(moment generating function)分別為

$$\mathrm{M}_{X_i}(\mathrm{t}) = (0.8 + 0.2e^t)^{17+i}, i = 1,2,3,4,5$$

試問下列何者最接近一年內這五個地區合計發生理賠之件數至少 25 件的機率?

(1) 0.1020 (2) 0.1292 (3) 0.1587 (4) 0.1788

39.(3) 若隨機變數 X 為參數$\mathrm{n} = 29, \mathrm{p} = 0.3$的二項分配。下列何者 X 的眾數(mode)？

(1) 6, 7 (2) 7, 8 (3) 8, 9 (4) 9, 10

40.(4) 下列敘述何者正確？

a. 若 $\mathrm{E(X)} > \mathrm{E(Y)}$，則 $\mathrm{P(X > Y)} > 0$。

b. 若給定兩隨機變數 X，Y 的聯合機率密度函數$f_{X,Y}(x, y)$，便可求得 X，Y 的邊際機率密度函數$f_X(x)$與$f_Y(y)$。

c. 若$\mathrm{Y = X + 1}$，則對所有的 u，$F_X(\mathrm{u}) = F_Y(\mathrm{u} + 1)$。

(1) a, b (2) a, c (3) b, c (4) a, b, c