C4 壽險數學與數理統計

選擇題 30 題:(第 1-25 題，每題 3 分 ; 第 26-30 題，每題 5 分)

1.(4)某十字路口每個月(30 天)發生車禍的次數服從卜瓦松(Poisson)分配，假設車禍每天發生次數的期望值為θ，且θ 是從珈瑪(Gamma)分配 G(α, β)中取出，其中 G(α, β) 所對應的機率密度函數為$f(\theta)=\frac{\beta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}e^{-\frac{\theta}{\beta}};\ \alpha>0,\ \beta>0,\ \theta>0$ 。請計算在一個月內此十字路口剛好只發生一次車禍的機率為何?

(1) $\frac{\alpha\beta}{(30+\beta)^{\alpha+1}}$ (2) $\frac{30\alpha\beta}{(1+\beta)^{\alpha}}$ (3) $\frac{\alpha\beta}{(1+\beta)^{\alpha}}$ (4) $\frac{30\alpha\beta}{(1+30\beta)^{\alpha+1}}$

2.(1)某壽險公司每個月核保的保單數 X 服從平均數為$\theta=30$的卜瓦松(Poisson)分配，在給定每個月核保的保單數 X 之下，假設理賠的保單數 $Y|X$ 服從二項(Binomial)分配 Bin(X, p = 0.2)。試求每個月的理賠保單數 Y 的期望值與變異數，(期望值，變異數)=

(1) (6，6) (2) (30，30) (3) (6，4.8) (4) (30，4.8)

3.(4) 假設進入某網路購票中心系統的次數服從一平均每分鐘 1200 次的卜瓦松過程(Poisson process)，請問第 5 次進入的平均時間超過 1 秒的機率值為何?

(1) $1.66*10^{-5}$ (2) $1.67*10^{-5}$ (3) $1.68*10^{-5}$ (4) $1.69*10^{-5}$

4.(2)假設每小時男顧客到戲院數目，服從強度$\lambda=10$的卜瓦松(Poisson)分配，每小時女顧客到戲院數目，服從強度$\lambda=20$的卜瓦松(Poisson)分配。求在 5 分鐘內不管性別至少有 2 名顧客到達戲院的機率?(四捨五入取至小數 2 位)

(1) 0.69 (2)0.71 (3)0.73 (4) 0.75

5.(2)假設隨機變數 X 服從標準常態(standard normal)分配 N(0,1)，亦即

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}};\ -\infty<x<\infty。$$

令$Y=e^X$，則新隨機變數 Y 的母體中位數為何?

(1) 0 (2) 1 (3) 0.5 (4) e^1

6.(　2　)假設電話錯接的次數服從平均數為 θ 的卜瓦松(Poisson)分配，某電信局自電話簿中隨機選取 10 個用戶並記錄每一戶在五月份電話錯接的次數如下:

8　4　1　1　2　5　3　2　3　1

請使用最大概似估計法(Maximum Likelihood Method)估算母體之(平均數，變異數)。

(1) (3,9)　(2) (3,3)　(3) (3,4.4)　(4) (3,4.9)

7.(　1　)某學生計畫檢定一個銅板出現正面的機率，該生假設銅板出現正面的機率為 θ 並設定虛無假設與對立假設分別為 $H_0{:}\theta = 0.2$ 與 $H_1{:}\theta = 0.7$，然後投擲該銅板 3 次。若將檢定決策設定為「3 次均為反面則不拒絕虛無假設$H_0{:}\theta = 0.2$」。試求此檢定決策犯型 I 錯誤的機率為何?

(1) 0.488　(2) 0.05　(3) 0.08　(4) 0.343

8.(　2　)某項產品歷年的平均壽命為 $\theta = 520$ 小時，標準差為$\sigma = 100$ 小時。若改變生產配方後欲了解該產品的平均壽命是否仍維持以往水準，則由目前的全部產品中隨機挑選出 400 件產品進行檢測，並測得樣本平均壽命為 531.2 小時且設定虛無假設與對立假設分別為 $H_0{:}\theta = 520$ 與$H_1{:}\theta \neq 520$ 。請根據上述條件計算此檢定問題在此筆樣本之下的 p 值(p-value)?

註： $P(Z < 2.20) = 0.9861$，$P(Z < 2.21) = 0.9864$，$P(Z < 2.22) = 0.9868$，

$P(Z < 2.23) = 0.9871$，$P(Z < 2.24) = 0.9875$，$Z \sim N(0,1)$。

(1) 0.0272　(2) 0.0250　(3) 0.0136　(4) 0.0125

9.(　1　)假設隨機變數 X 服從均勻(uniform)分配其機率密度函數為$f(x;\theta) = 1/\theta;\ 0 < x < \theta, 0 < \theta$，且令 θ 的先驗(prior)分配為 $\pi(\theta) = \theta e^{-\theta};\ 0 < \theta$。若定義估計式 $\delta(X)$ 的損失函數(loss function)為$l\big(\theta, \delta(X)\big) = |\theta - \delta(X)|$，試求 θ 的貝氏估計量(Bayes estimator)為何?

(1) $X + \ln 2$　(2) $\frac{X}{2} + \ln 2$　(3) $X - \ln 2$　(4) $\frac{X}{\ln 2}$

10.(　3　)假設大台北地區 7 月份平均氣溫 X 為服從具有未知平均數 μ 及標準差 σ=3 常態分佈。過去 10 年紀錄如下：30.5，34.1，29.1，33.1，34.2，35.7，35.9，36.3，37.8，38.5。在顯著水準 α =0.05 下，

檢定假設 $H:\mu$=35，對立 $A:\mu$<35，則下列敘述何者正確？(常態分配表 $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}dt$ ，$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$: $\Phi(1.29)=0.9$，$\Phi(1.64)=0.95$)

(1) 檢定統計量為 $\overline{X}-X_{(1)}$ (2) 拒絕虛無假設 (3) 接受虛無假設

(4) 臨界點為 35

11.(4)設 $X_1,\cdots,X_n$ 為具有機率密度函數 $f(x;\theta)=\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, 0<x,\theta<\infty$ 獨立隨機變數。假設檢定 $H:\theta\geq\theta_0$ 對立 $A:\theta<\theta_0$，若 θ_0=1000，而對立假設 θ_1=500，顯著水準 α=0.05，如果檢定力(power)最少是 0.95，求所需最少樣本數？(常態分配表 $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}dt$ ，$\Phi(-x)=1-\Phi(x):\Phi(1.64)=0.95$)

(1) 10 (2) 15 (3) 20 (4) 25

12.(2) 下列哪些式子可做為有效的死亡函數?

A. $\mu_{\mathrm{x}}=(1+x)^{-3}, x\geq 0$

B. $\mu_{\mathrm{x}}=0.05(1.01)^{x}, x\geq 0$

C. $f_0(x)=e^{-x/2}, x\geq 0$

(1) A (2) B (3) A 及 B (4) A 及 C

13.(1) 在下列死亡力函數下，試算完整平均餘命 $\overset{o}{e}_{30}$?

$$\mu_{30+t}=\begin{cases}0.01, t\leq 5\\ 0.02, t>5\end{cases}$$

(1) 52.4 (2) 54.1 (3) 55.4 (4) 56.1

14.(1) 令 k 表示整數年餘命隨機變數(curtate future lifetime random variable)

- $q_{x+k}=0.1(k+1), k=0,1,\cdots,9$
- $X=\min(K,3)$

請計算 X 之變異數.

(1) 1.0686 (2) 1.0752 (3)1.0834 (4)1.0961

15. (2)已知 $l_{20}=9500, q_{20}=0.010, q_{21}=0.015, q_{23}=0.030, d_{22}=250$，試求 24 歲的期望生存人數

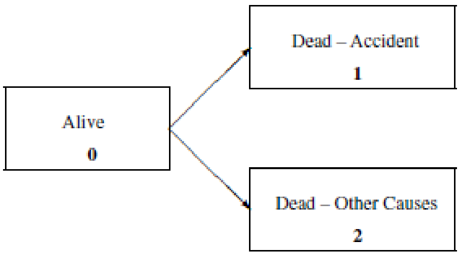
(1) 介於 8,450 到 8,600 (2) 介於 8,601 到 8,750 (3) 介於 8,751 到 8,900 (4) 大於 8,900

16. (3) 有一五年檢選期間之生命表如下，請依據 UDD 假設，計算 ${}_{0.2|3.8}q_{[70]}$ 為多少？

(1) 0.065387 (2) 0.065276 (3) 0.065141 (4) 0.064936

Age, x	Duration 0 $q_{[x]}$	Duration 1 $q_{[x-1]+1}$	Duration 2 $q_{[x-2]+2}$	Duration 3 $q_{[x-3]+3}$	Duration 4 $q_{[x-4]+4}$	Duration 5+ q_x
70	0.010373	0.013099	0.015826	0.018552	0.021279	0.026019
71	0.011298	0.014330	0.017362	0.020393	0.023425	0.028932
72	0.012458	0.015825	0.019192	0.022559	0.025926	0.032133
73	0.013818	0.017553	0.021288	0.025023	0.028758	0.035643
74	0.015308	0.019446	0.023584	0.027721	0.031859	0.039486
75	0.016937	0.021514	0.026092	0.030670	0.035248	0.043686
76	0.018714	0.023772	0.028830	0.033888	0.038946	0.048270
77	0.020649	0.026230	0.031812	0.037393	0.042974	0.053262

17. (1) 假設意外死亡發生率模型如下：



若各年齡意外和其它原因死亡的死力假設為 $\mu_x^{01}=10^{-5}$,

$\mu_x^{02}=(5\times10^{-4})+(7.6\times10^{-5})\times1.09^x$，請計算 ${}_{10}p_{30}^{00}$.

(1) 0.979122 (2) 0.979232 (3) 0.978232 (4) 0.978122

18. (2)同上題，請計算 ${}_{10}p_{30}^{01}$

(1) 0.022099 (2)0.020779 (3)0.021788 (4)0.023124

19.(1)我們將時間連續的馬可夫鏈應用在夫妻連生模型上，假設有四種狀態

狀態一: 夫妻二人均存活

狀態二: 丈夫活著但太太死掉

狀態三: 太太活著但丈夫死掉

狀態四: 夫妻二人均死掉

狀態轉移可以從狀態一到狀態二或三，從狀態二或三到狀態四。設每年轉移機率矩陣如下:

$$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

求當一對已婚夫妻在今年年初都還活著，計算他們都將在兩年內死亡的機率

(1)0.1 (2)0.2 (3)0.3 (4)0.4

20.(2)通達電信公司販售之手機狀態區分為(0)正常狀態、(1)待修狀態、(2)無法修復狀態等三類，各狀態之間以週為單位的轉換機率如下

$$\begin{array}{c} (0) \\ (1) \\ (2) \end{array}\begin{bmatrix} 0.75 & 0.15 & 0.10 \\ 0.50 & 0.30 & 0.20 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

若通達電信公司本週在市場上的手機 10,000 支，其中有 90%為正常狀態，10%為待修狀態，試估計三週後無法修復的手機數量。

(1)少於 3,000 (2) 3,001 至 3,250 (3) 3,251 至 3,500 (4)大於 3,500

21.(2) 曉華以 20,000 元購買一輛登山自行車，預定使用 3 年。曉華在自行車上安裝了追蹤器，可以協助尋回失竊的登山自行車。若失竊是自行車唯一的危險因子，安裝追蹤器的登山自行車每年失竊機率分別為 $q_0 = 0.2, q_1 = 0.15, q_2 = 0.1$。大華保險公司對於登山自行車提供以下失竊保單

- 第 t 年失竊於年底可給付

  $25,000 - 5,000t,\ \ t = 1,2,3$

- $i = 2\%$

請計算此失竊保單的躉繳保費為多少？

(1) 少於 6,000 元 (2) 6,001 元與 6,500 元之間

(3) 6,501 元與 7,000 元之間 (4) 7,001 元與 7,500 元之間

22.(　2　)某保險公司承保不斷電設備，故障是唯一危險因子，因故障給付之補償隨時間而不同，各項精算假設如下：

- 時間 t 發生故障時立即給付補償 B_t

$$B_t = \begin{cases} 300, 0 \le t < 25 \\ 100, t \ge 25 \end{cases}$$

- 死利 $\mu_t = 0.04, t \ge 0$
- 息利

$$\delta_t = \begin{cases} 0.02, 0 \le t < 25 \\ 0.03, t \ge 25 \end{cases}$$

請計算躉繳保費。

(1)173.47　(2)170.57　(3)168.12　(4)160.76

23.(2) 假設依保單組合之理賠數 N 具有如下機率：$P_r(N=0)=0.6$，$P_r(N=5)=0.3$，$P_r(N=10)=0.1$；並且理賠金額為 0 或 10 的機率分別為 0.8 及 0.2。假設理賠數與理賠金額彼此是獨立事件，求此保單組合總理賠的變異係數(coefficient of variation)

(1)52 %　(2)54%　(3)56%　(4)58%

24.(　2　) 有 100 位現年 x 歲人投保二種終身險，每年初繳保費至死亡為止，死亡年末給付。其中投保 A 類有 70 人，保額 1 元，每人每年保費 0.048；投保 B 類有 30 人，保額 4 元，每人每年保費 0.192。已知 $A_x = 0.4$，${}^2A_x = 0.2$，保險公司對此 100 人之總損失為 L，以利率 d =0.06 計算，求損失 L 變異數 $Var(L)$？

(1)70　(2)71　(3) 72　(4) 73

25.(　4　)曉明 40 歲及曉華 39 歲，適用相同的生命表。曉明購買 1,000 萬元 10 年期生死合險，死亡給付於年底支付，年繳保費 95 萬元，$i = 2\%$。假設 $q_{39} = 0.005$，試計算曉華購買 1,000 萬元 11 年期生死合險，死亡給付於年底支付的年繳保費。

(1) 90.20 萬元 (2) 89.28 萬元 (3) 87.32 萬元 (4) 85.53 萬元

26.(4)假設有 5 種不同的事件，每一種事件在[0, 10]之間發生的次數均服從卜瓦松(Poisson)分配，這 5 種不同的事件在單位時間內發生的次數期望值分別為θ_1，θ_2，θ_3，θ_4，與 θ_5，且不同事件的發生彼此相互獨立。假設隨機變數 N 表示這 5 種不同事件在[0, 3] 之間完全不發生而在[3, 10]之間至少發生一次的種類數，亦即$N \in \{0,1,2,3,4,5\}$。則 N 的期望值為何?

(1) $\sum_{i=1}^{5} e^{-10\theta_i}\left(1-e^{-3\theta_i}\right)$

(2) $\sum_{i=1}^{5} e^{-7\theta_i}\left(1-e^{-3\theta_i}\right)$

(3) $\sum_{i=1}^{5} e^{-3\theta_i}\left(1-e^{-10\theta_i}\right)$

(4) $\sum_{i=1}^{5} e^{-3\theta_i}\left(1-e^{-7\theta_i}\right)$

27.(1)假設隨機變數$X_1,\ldots,X_n$獨立且服從相同的分配，其中$E[X_i]=\theta>0$ 和 $\mathrm{Var}[X_i]=\sigma^2>0$;$i=1,\ldots,n$ 均為未知參數。若考慮使用估計量$T=\frac{X_1+2X_2+3X_3+4X_4}{10}$ 估計未知參數 θ，則 T 的均方差(MSE; Mean Square Error)為何?

(1) $\frac{3}{10}\sigma^2$ (2) $\frac{9}{100}\sigma^2$ (3) $\frac{1}{10}\sigma^2$ (4) $\frac{3}{100}\sigma^2$

28.(2)假設隨機變數$X_1,\ldots,X_n$獨立且服從常態(normal)分配$N(\theta,1)$，亦即

$$f(x;\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2}};\ -\infty<x<\infty,-\infty<\theta<\infty。$$

定義$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 和$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，請找一個常數 a 使得 $a\overline{X}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 為 θ 的不偏估計式(unbiased estimator)。

(1) $\frac{1}{n}$ (2) $\frac{1}{n-1}$ (3) $\frac{n-1}{n}$ (4) $\frac{n}{n-1}$

29.(3)假設一 3 狀態離散型馬可夫鏈(3-state discrete Markov chain)，其中狀態 0 表示健康，狀態 1 表示失能，狀態 2 表示死亡，並且

$$p^{01} = 0.1,\ p^{02} = 0.1,\ p^{10} = 0.3,\ p^{12} = 0.1,\ p^{2i} = 0, i = 0,1$$

考慮以下失能壽險

- 對於年初為失能狀態被保險人，年底支付失能給付 1,000 元。
- 死亡發時的年末支付死亡給付 2,000 元
- 保險期間為 3 年。
- 健康狀態時收取保費。
- $v = 0.95$

試計算在時間 0 健康狀態者的年繳保費(小數以下捨去)。

(1) 490 (2) 500 (3) 510 (4) 520

30.(1)假設 x 歲的 100 人集資成立基金，相約 10 年末存活者可以獲得 500 元。

- ${}_{10}q_x = 0.1$
- $i = 0.03$ 的機率 25%，$i = 0.05$ 的機率 75%

試計算此基金 10 年底應支付之現值的標準差(standard deviation of the actuarial present value)。

(1) 2,717 (2) 2,800 (3) 2,852 (4) 2,918