C1 機率

選擇題 40 題(每題 2.5 分):

1. (4) 若隨機變數 X 具平均數為 4 之指數分配(exponential distribution)，請問 X 之變異數為何?

   (1) 2　(2) 4　(3) 8　(4) 16

2. (4) 隨機變數X之動差生成函數(moment generating function)為

$$M_X(t) = E(e^{t*X}) = \exp[3(e^t - 1)], \quad -\infty < t < \infty.$$

   求 $E(X)$ 之值。

   (1) 0　(2) 1　(3) 2　(4) 3

3. (3) 若隨機自一副撲克抽取三張，每次抽出後即刻放回，請問第三張為紅牌之機率為何？

   (1) 0.3　(2) 0.4　(3) 0.5　(4) 0.6

4. (1) 假設高鐵誤點的次數以卜瓦松分配(Poisson distribution)描述，平均一年 6 次誤點。請問半年內誤點 3 次的機率為何？

   (1) 0.224　(2) 0.423　(3) 0.647　(4) 1.000

5. (1) 已知$P(A)=\frac{1}{4}$,$P(B)=\frac{1}{2}$,$P(A|B)=\frac{1}{3}$, 求$P(A\cap B)$。

   (1) $\frac{1}{6}$　(2) $\frac{1}{4}$　(3) $\frac{1}{3}$　(4) $\frac{4}{5}$

6. (1) 已知隨機變數 X 具均勻分配(uniform distribution)，平均數為 10，變異數為 12，請問此隨機變數之下限為何？

   (1) 4　(2) 6　(3) 14　(4) 16

7. (3) 若隨機變數 N 具卜瓦松分配(Poisson distribution)，其平均數為 2。請問 $E(N|N \leq 1)$ 為何？

(1) 0　(2) $\frac{1}{2}$　(3) $\frac{2}{3}$　(4) 1

8. (3) 已知隨機變數 X 具常態分配(normal distribution)，平均數為 0，變異數為 0.25，若 $Y = e^X$ 試求 $P(Y \leq 1)$ 之值。

(1) 0　(2) 0.25　(3) 0.5　(4) 1

9. (3) 若X具指數分配(exponential distribution)，其中位數(median)為 $2\ell n2$，請問其平均數為何？

(1) 0.5　(2) 1　(3) 2　(4) 4

10. (1) 若隨機變數(X, Y)具二維常態分配(bivariate normal distribution)，其平均數為 $(\mu_X = 2, \mu_Y = 3)$，變異數為 $(\sigma_X^2 = 4,\ \sigma_Y^2 = 8)$，相關係數為 $\rho_{XY} = -0.5$。
請問 $Var(Y|X = 1)$ 為何？

(1) 6　(2) 8　(3) 10　(4) 12

11. (3) 若隨機變數(X, Y)具二維常態分配(bivariate normal distribution)，其平均數為 $(\mu_X = 2, \mu_Y = 3)$，變異數為 $(\sigma_X^2 = 4,\ \sigma_Y^2 = 8)$，相關係數為 $\rho_{XY} = -0.5$。
請問 $E[max(X, Y)] + E[min(X, Y)]$ 為何？

(1) 2　(2) 4　(3) 5　(4) 10

12. (3) 隨機變數(X, Y, Z)具聯合機率密度函數(joint probability density function)如下：

$$f_{XYZ}(x, y, z) = 6e^{-(3x+2y+z)}, \qquad x > 0, y > 0, z > 0,$$

請問 $E(X + Y + Z)$ 為何？

(1) $\frac{1}{6}$　(2) $\frac{1}{3}$　(3) $\frac{11}{6}$　(4) 6

13. (2) 若隨機變數 X,Y 具聯合機率質量函數(joint probability mass function)如下表，請問 $Var(Y|X=2)$ 為何？

$f_{XY}(x,y)$		y			
		-2	-1	1	2
x	1	0.09	0.09	0.01	0.01
	2	0.10	0.05	0.05	0.10
	5	0.10	0	0	0.05
	7	0.15	0.10	0.10	0

(1) 1 (2) 3 (3) 6 (4) 9

14. (1) 假設隨機變數 X 為伯努力分配(Bernoulli distribution)，平均數為 0.1。隨機變數 Y 為伯努力分配(Bernoulli distribution)，平均數為 0.5。若 X，Y 獨立，請問 $E(X^2Y)$ 為何？

(1) 0.05 (2) 0.45 (3) 0.55 (4) 0.95

15. (3) 某地區一年平均停電 6 次，若停電次數服從卜瓦松分配(Poisson distribution)，請問兩次停電間隔時間超過一個月的機率為何？

(1) 0.1867 (2) 0.3015 (3) 0.6065 (4) 0.8743

16. (1) 假設某大醫院內科門診在每天有可能 2 到 4 位醫師有門診。每位醫師的病人數的分布都是平均值為 40 的卜瓦松分配(Poisson distribution)。令隨機變數 X 為該醫院內科一日門診人數，求內科一日門診人數的標準差。

(1) 34 (2) 40 (3) 44 (4) 120 **(四捨五入取至整數)**

17. (4) 假設一台機器需要兩步驟來維護，第一步驟需時為指數分布平均時間為 0.1 小時，第二步驟需時為指數分布平均時間為 0.3 小時，兩步驟所需時間為獨立。如果有 40 台機器需要維護，一台接續一台維護，所需累積時間超過 16 小時的近似機率為多少?

(1) 0.2 (2) 0.3 (3) 0.4 (4) 0.5

18. (2) 假設 X 及 Y 聯合機率密度函數(joint probability density function)如下：

$$f(x,y) = c(y-x)e^{-y}, \qquad -\frac{y}{2} < x < \frac{y}{2}, 0 < y < \infty.$$

試求 c。

(1) 1 (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{1}{4}$

19. (1) 考慮三類 LED 燈的壽命，各自的平均壽命為 10,000 小時、20,000 小時和 30,000 小時。若各取一個 LED 進行測試，計算最長壽命低於 10,000 小時的機率(**最接近所求的機率**)。

(1) 0.85 (2) 0.90 (3) 0.95 (4) 1

20. (3) 隨機變數 X 之機率密度函數(probability density function)為

$$f(x) = \frac{x-40}{10^2}e^{-\frac{x-40}{10}}, \qquad 40 < x < \infty.$$

試求眾數。

(1) 10 (2) 40 (3) 50 (4) 60

21. (4) Y 為 0 到 10 之間均勻分配(uniform distribution)的隨機變數。F 及 f 為 Y 的累積分配函數(cumulative distribution function)及機率密度函數(probability density function)。

令 $g(x) = \frac{\int_x^\infty (y-x)f(y)\,dy}{1-F(x)}$ 為目標統計量，計算 $g(2)$。

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4 **(四捨五入取整數)**

22. (2) 若 A 與 B 兩互斥事件，同時又為獨立事件，且 $P(\mathrm{A}) = 0.4$，則 $P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B})$ 為何?

(1) 0 (2) 0.4 (3) 0.6 (4) 1

23. (1) 下列敘述何者正確？

a.若 $P(A|B)=P(A)$，則 $P(A^c|B)=P(A^c)$。

b.若 $P(A^c|B)=P(A^c)$，則 $P(B|A)=P(B)$。

c.若 $P(A)P(B)\neq 0$ 且 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$，則 $P(A^c|B)=P(A^c)$。

(1) a, b　(2) b, c　(3) a, c　(4) a, b, c

24. (3) 今投擲兩枚均勻的六面骰子。試問出現兩枚骰子點數和大於點數積的機率為何?

(1) $\frac{5}{36}$　(2) $\frac{5}{18}$　(3) $\frac{11}{36}$　(4) $\frac{2}{6}$

25. (3) 若隨機變數 X 的累積分配函數(cumulative distribution function)為

$$F_X(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ 0.05x, & 0\leq x<20, \\ 1, & x\geq 20. \end{cases}$$

試問隨機變數 X 的變異係數(coefficient of variation)為何?

(1) 0.2887　(2) 0.3333　(3) 0.5774　(4) 0.7071

26. (1) 若隨機變數 X 的動差生成函數(moment generating function)為

$$M_X(t)=0.2+\frac{8}{10-t}\ .$$

試問下列何者為 X 的中位數?

(1) 0.0470　(2) 0.0693　(3) 0.0867　(4) 0.1155

27. (3) 令

$$f(x)=\frac{\alpha\theta^{\alpha}}{(x+\theta)^{\alpha+1}}\ ,0\leq x<\infty,\theta>0.$$

若 X 的第 20 百分位數為$\theta-k$，且 X 的第 90 百分位數為$3\theta-2k$ ，試問下列何者為α的值?

(1) 1　(2) 2　(3) 3　(4) 4

28. (2) 設某保險一年發生理賠之件數為卜瓦松分配(Poisson distribution)，平均一年發生理賠之件數為 8 件。試問下列何者為兩相繼理賠事件相隔時間的變異係數(coefficient of variation)?

(1) $\frac{1}{8}$ (2) 1 (3) 2 (4) 8

29. (4) 設 X_1, X_2 分別為某保險在南北兩個地區一年內發生理賠之件數。理賠件數為獨立且相同的分配，其機率分配函數為$0.8(0.2)^x$, $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$。令 $Y = X_1 + X_2$ 為這兩個地區一年內發生理賠件數之總數。試問下列何者為Y的動差生成函數(moment generating function)?

(1) $\frac{0.2}{1-0.8e^t}$ (2) $\left(\frac{0.2}{1-0.8e^t}\right)^2$ (3) $\frac{0.8}{1-0.2e^t}$ (4) $\left(\frac{0.8}{1-0.2e^t}\right)^2$

30. (3) 設 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 為五獨立的隨機變數，其機率密度函數(probability density function)分別為

$$f_{X_i}(x) = \binom{37+i}{x}(0.1)^x(0.9)^{37+i-x}, \quad x = 0, 1, \cdots, 37 + i。$$

試求 $P(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \leq 22)$ 之近似值。

(1) 0.5871 (2) 0.6591 (3) 0.7224 (4) 0.8023

31. (4) 下列敘述何者正確?

a. 二項分配(binominal distribution)的均數必大於或等於變異數。
b. 負二項分配(negative binominal distribution)的均數必小於或等於變異數。
c. 卜瓦松分配(Poisson distribution)的均數必等於變異數。
d. 指數分配的均數可小於、大於、或等於變異數。

(1) a, b (2) a, c (3) a, b, c (4) a, b, c, d

32. (3) 若隨機變數 X 之機率密度函數為

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{x}{6}\right)^2 e^{-(x/6)^3}, & 0 \leq x < \infty, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

令 $Y = -2\ell n[1 - e^{-(X/6)^3}]$，試問 $P(Y \leq 8 | Y > 5)$ 為何?

(1) 0.36788 (2) 0.60653 (3) 0.77687 (4) 0.86466

33. (2) 在為數 20 人當中，有 12 人較喜愛看籃球賽，8 人較喜愛看棒球賽。若從這 20 人當中隨機抽取 3 人。試問這 3 人至少有 2 人較喜愛看棒球賽的機率為何?

(1) 0.29474 (2) 0.34386 (3) 0.46316 (4) 0.65614

34. (2) 若

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{6}, & (x,y)=(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),\\ \frac{1}{3}, & (x,y)=(3,3).\end{cases}$$

試問 $P(\mathrm{X}=1|\mathrm{Y}=3)$ 為何?

(1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{1}{2}$

35. (3) 設 X,Y 分別為某保險在兩個地區一年內發生理賠之件數。X與Y為獨立且相同的分配，其機率密度函數(probability density function)

$$f_X(x)=0.8(0.2)^x, \qquad x=0,1,\cdots,$$
$$f_Y(y)=0.8(0.2)^y, \qquad y=0,1,\cdots.$$

試問 $P(X=Y)$ 為何?

(1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{3}{4}$

36. (2) 設隨機變數X為分佈於(0,1)的均勻分配(uniform distribution)。
若

$$P(Y=y|X=x)=\binom{20}{y}x^y(1-x)^{20-y}, \qquad y=0,1,2,\dots,20.$$

試問 $E(Y)$ 為何?

(1) 5 (2) 10 (3) 15 (4) 20

37. (1) 若隨機變數 X 之機率密度函數(probability density function)為

$$f_X(x) = \frac{e^{-6}6^x}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2, \cdots ,$$

而隨機變數 Y 在 $X = x$ 的條件機率密度函數(conditional probability density function)為

$$f_{Y|X}(y|x) = \binom{x}{y} 0.2^y (0.8)^{x-y}, \quad y = 0, 1, 2, \dots, x,$$

且當 $X = 0$ 時 $Y = 0$。試問 $P(Y \geq 2)$ 為何?

(1) 0.3374 (2) 0.4750 (3) 0.5249 (4) 0.6915

38. (2) 設 Z_1, Z_2 為兩個獨立標準常態分配 $\mathrm{N}(0, 1)$。試問 $P({Z_1}^2 + {Z_2}^2)$ 為何?

(1) 0.7768 (2) 0.9502 (3) 0.9772 (4) 0.9987

39. (1) 若 $Y_1 \leq Y_2 \leq Y_3$ 為 X_1, X_2, X_3 的順序統計量(order statistics)，X_1, X_2, X_3 為獨立且相同分配之指數隨機變數，其共同之機率密度函數(probability density function)為

$$f(x) = 2e^{-2x}, \qquad 0 < x < \infty.$$

試問 $P(Y_3 \leq 2)$ 為何?

(1) 0.2526 (2) 0.9460 (3) 0.9502 (4) 0.9816

40. (3) $f_{Y|X}(y|x) = 1,\ 0 < x < y < x + 1$ 且 $f_X(x) = 1,\ 0 < x < 1$。
試問 $P(X + Y < 1)$ 為何?

(1) $\frac{1}{16}$ (2) $\frac{1}{8}$ (3) $\frac{1}{4}$ (4) $\frac{1}{2}$

（試題結束）