C4 壽險數學與數理統計

選擇題 30 題(第 1-25 題，每題 3 分；第 26-30 題，每題 5 分):

1. (2) 若 $N(t)$ 表示某地區在地震發生後 (0, t] 時間區間內所發生的餘震次數且 $N(t)$ 服從平均數為 $\theta(t) = 3t$ 的卜瓦松(Poisson)分配。試求 (3, 5] 時間區間內餘震發生次數的期望值。

   (1) 3 (2) 6 (3) 9 (4) 12

2. (4) 假設每個小時公車、計程車與私人轎車經過某路口的次數分別服從平均數為 10、 15 與 35 的卜瓦松(Poisson)分配。試求在 5 分鐘內至少有 2 輛車(公車、計程車或私人轎車)經過該路口的機率。

   (1) $1-3e^{-2}$ (2) $1-4e^{-3}$ (3) $1-5e^{-4}$ (4) $1-6e^{-5}$

3. (4) 令 $X(t)$ 表示某保險公司在 (0, t] 時間區間內給付的理賠保險金總額。已知該保險公司每一個星期理賠的個案數服從卜瓦松(Poisson)分配$Poi(\theta = 3)$ 且理賠個案之間相互獨立。若假設每一個個案的理賠金額服從期望值為 $\beta = 20{,}000$ 美元的指數(Exponential)分配$Exp(\beta)$。試求在五個星期內該保險公司給付的理賠保險金總額之期望值與變異數:(期望值，變異數)。

   (1) $(2\times10^5,\ 3.1\times10^{10})$ (2) $(3\times10^5,\ 2.1\times10^{10})$
   (3) $(2\times10^5,\ 1.3\times10^{10})$ (4) $(3\times10^5,\ 1.2\times10^{10})$

4. (2) 假設一火災保險公司所承保的保險標的物發生火災的次數服從卜瓦松(Poisson)分配，且每個月發生火災事件的期望次數為 10 次。保險標的物可以區分為大樓與獨棟房屋，已知該公司承保的標的物當中有 60% 是大樓，40% 是獨棟房屋，且大樓或獨棟房屋發生火災之事件彼此獨立。請問在已知某個月份有 8 棟大樓發生火災的條件之下，該月份獨棟房屋發生火災事件的期望次數為何？

   (1) 2 (2) 4 (3) 16/3 (4) 8

5. (3) X 服從卜瓦松(Poisson)分配，若 $P(X=1) = P(X=4)$，求眾數為何?

   (1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3

6. (4) 考慮一個複合卜瓦松過程(compound Poisson process),$S(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} X_j$,其中 X_j 服從指數分配,期望值為 500,$\{X_j\}$ 彼此獨立;$N(t)$ 服從卜瓦松(Poisson)分配,單位時間發生次數的期望值為 5 次,$\{X_j\}$ 與 $N(t)$ 亦獨立。請計算 $E[S(20) \mid S(10) = 50{,}000]$?

(1) 0 (2) 25,000 (3) 50,000 (4) 75,000

7. (1) 若 X 服從卜瓦松(Poisson)分配,下表為由其隨機抽出之樣本,樣本數 55,試求 $P(X = 2)$ 的最大概似估計量。

X	0	1	2	3	4	5
次數	7	14	12	13	6	3

(1) 0.27 (2) 0.22 (3) 0.18 (4) 0.13

8. (1) 某製鞋廠製造童鞋,依過去經驗出現瑕疵品的比率約為 $P = 0.1$。今隨機抽取 5 雙童鞋,若最多只出現 1 雙瑕疵品則接受 $H_0: P = 0.1$ 的虛無假設,否則將認為瑕疵率 $P > 0.1$,亦即將接受對立假設 $H_1: P > 0.1$。試求在 $P = 0.2$ 時所犯的型 II 誤差(type II error)的機率為何?**(四捨五入,取小數兩位)**

(1) 0.74 (2) 0.68 (3) 0.26 (4) 0.32

9. (4) 假設隨機變數 X_1 與 X_2 獨立且服從相同的機率密度函數

$$f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1}; \quad 0 < x < 1,\ 0 < \theta < \infty。$$

考慮檢定 $H_0: \theta = 1$ v.s. $H_1: \theta = 2$ 且已知此檢定的拒絕域為

$$C = \left\{(x_1, x_2):\ \frac{7}{9} \le x_1 x_2\right\}。$$

試求此檢定的顯著水準(significant level)為何?

(1) $\frac{7}{9} + \frac{7}{9}\ln\left(\frac{2}{9}\right)$ (2) $\frac{2}{9} + \frac{2}{9}\ln\left(\frac{7}{9}\right)$ (3) $\frac{7}{9} + \frac{2}{9}\ln\left(\frac{7}{9}\right)$ (4) $\frac{2}{9} + \frac{7}{9}\ln\left(\frac{7}{9}\right)$

10. (4) 隨機變數 $X_1,\dots,X_n$ 獨立且服從常態(normal)分配 $N(\theta,\sigma^2)$，亦即

$$f(x;\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}};\ -\infty<x<\infty,-\infty<\theta<\infty\ 。$$

其中$\sigma^2>0$ 為已知常數且假設參數 θ 的先驗(prior)分配為$N(\theta_0,\sigma_0^2)$ ；θ_0 與 σ_0^2 為事先給定的已知常數。若定義$\boldsymbol{X}=(X_1,\dots,X_n)$，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ ，且估計式 $\delta(\boldsymbol{X})$ 的損失函數(loss function)為 $l(\theta,\delta(\boldsymbol{X}))=|\theta-\delta(\boldsymbol{X})|$，試求 θ 的貝氏估計量(Bayes estimator)為何?

(1) $\{x_1,\dots,x_n\}$ 的中位數 (2) $\bar{x}$：樣本平均數 (3) $\frac{(\overline{x}\sigma_0^2+n\sigma^2\theta_0)}{\sigma_0^2+\sigma^2/n}$ (4) $\frac{(n\overline{x}\sigma_0^2+\sigma^2\theta_0)}{n\sigma_0^2+\sigma^2}$

11. (3) 假設隨機變數 Y 服從二項(Binomial)分配 Bin(n, θ)，其機率密度函數為

$$g(y;\theta)=C_y^n\ \theta^y(1-\theta)^{n-y};\ \ y=0,1,\dots,n,0<\theta<1,$$

並假設 θ 的先驗(prior)分配為 Beta(α,β)，其機率密度函數為

$$\pi(\theta)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1};\ \ 0<\theta<1,\alpha>0,\beta>0。$$

若考慮估計式 $\delta(Y)$ 的損失函數(loss function)為 $l(\theta,\delta(Y))=(\theta-\delta(Y))^2$，可以推得 θ 的貝氏估計量(Bayes estimator)為

$$\delta^B(Y)=A_n\times\frac{y}{n}\ +B_n\times\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\quad 。$$

若 $\lim_{n\to\infty}A_n=a$ 且 $\lim_{n\to\infty}B_n=b$，則數對 (a,b) = ?

(1) (2, 1) (2) (1, 1) (3) (1, 0) (4) (0, 1)

12. (2) 若隨機變數 X 服從常態(normal)分配 $N(\theta,\sigma^2)$，其中 θ 為已知常數，$\sigma^2>0$ 為未知參數。應用貝氏統計方法擬對 σ^2 建構貝氏估計式。下列分配何者為 σ^2 的共軛先驗分配(conjugate prior)?

(1) Gamma (2) Inverse gamma (3) Lognormal (4) Chi-squared

13. (3) 若計算${}_{t|}\ q_x=0.05$，$t=0,1,2,\dots\dots,9$，試求 ${}_2\mathrm{p}_{\mathrm{x+4}}$ 為何?

(1) 0.75 (2) 0.85 (3) 0.875 (4) 0.9

14. (4) 請依據下列台灣壽險業第四回經驗生命表(2002TSO)之女性死亡率，

年齡(x)	生存人數(l_x)	死亡人數(d_x)
105	13,180	d_{105}
106	6,438	d_{106}
107	2,908	1,706
108	l_{108}	751
109	l_{109}	299
110	l_{110}	152

試算 106 歲女性之平均餘命(e_{106})為何?

(1) 2.11 (2) 1.23 (3) 0.51 (4) 0.73

15. (3) 假設

- ${}_{30}p_{40} = 0.15$
- ${}_{10}p_{40} = 0.9$
- 承保 50 歲 900 人之 20 年死亡險

試計算 900 人中平均多少人可以領到死亡給付。

(1) 710 (2) 730 (3) 750 (4) 770

16. (2) 各年齡內的死亡在 UDD 假設之下，若 45 歲 1,000 人，46 歲 880 人，試估算 45 歲又 9 個月的存活人數。

(1) 920 (2) 910 (3) 800 (4) 890

17. (4) 假設寵物第一年的死亡率 0.05，第二年的死亡率 0.15。試在 UDD 的假設下求寵物 2 年內的平均餘命。

(1) 介於 0.8 年至 1 年 (2) 介於 1 年至 1.2 年
(3) 介於 1.2 年至 1.5 年 (4) 大於 1.5 年

18. (2) 假設一 3 狀態模型(3-state model)表示 x 歲者健康狀況，其中狀態 0 表示健康，狀態 1 表示失能，狀態 2 表示死亡，並且

$$\mu_x^{01} = \frac{1}{20} \ , \qquad \mu_x^{12} = 2\mu_x^{01} \ .$$

試計算 60 歲健康者 70 歲死亡的機率。

(1) 小於 0.15　(2) 0.15 與 0.16 之間　(3) 0.16 與 0.17 之間　(4) 大於 0.17

19. (1) 假設一 3 狀態離散型馬可夫鏈(3-state discrete Markov chain)，其中狀態 0 表示健康，狀態 1 表示失能，狀態 2 表示死亡，並且

$$p^{01} = 0.1, \qquad p^{02} = 0.1, \qquad p^{12} = 0.1, \qquad p^{2i} = 0, \qquad i = 0, 1.$$

若時間 0 時健康狀態的人數是失能狀態人數的 2 倍，試計算在時間 3 時健康狀態的人數對於失能狀態人數的倍率。

(1) 2.7837　(2) 2.6502　(3) 2.5489　(4) 2.4621

20. (3) 依據過去汽車險出險紀錄，將被保險人的風險分為三類，狀態(1)：低風險、狀態(2)：中度風險、狀態(3)：高風險。各狀態之間以年為單位的轉換機率矩陣如下

$$\begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \begin{bmatrix} 0.80 & 0.15 & 0.05 \\ 0.60 & 0.30 & 0.10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

若產險公司目前的汽車險保單 10,000 張，其中有 80%為低風險，20%為中度風險。假設所有保單 3 年持續續保，試估計 3 年後屬於高風險的保單數量。

(1) 少於 1,300　(2) 1,301 至 1,500　(3) 1,501 至 1,700　(4) 大於 1,700

21. (3) X 歲的甲先生欲投保三年期定期保險，在下列假設前提下 ：

(A) Z 代表該保險給付現值變數

(B)$q_{x+k} = 0.02(k+1), k = 0,1,2$

(C)下表為三年期定期保險之死亡保額 b_{k+1}

k	b_{k+1}
0	3000
1	3500
2	4000

(D) 前述保險金於該死亡年度末給付。

試算 $\sqrt{Var[\mathrm{Z}]}$ 為何？

(1) 351 (2) 368 (3) 1104 (4) 412

22. (2) 針對 60 歲試算職場傷害保險之躉繳保費。

- 提供未來 5 年醫療給付及薪資補償
- 第一年末醫療給付 20,000 元，其後每年成長 5%
- 第一年末薪資補償 70,000 元，其後每年遞減 3%
- 利率 3%
- 職場傷害 t 年後之存活率為 0.95^t, $t = 1,2,3,4,5$

(1) 小於 30 萬 (2) 30 萬與 35 萬之間 (3) 35 萬與 40 萬之間 (4) 大於 40 萬

23. (4) 某甲 30 歲購買一 20 年定期保險(term insurance)，其內容如下：

- 死亡保障 100 萬元
- 死亡保障於死亡發生的年末支付
- 保費及費用於年初支付，共計 20 期
- $\ddot{a}_{30:\overline{20}|} = 15.4150$
- $i = 2.75\%$
- ${}_{20}E_{30} = 0.5535$
- 費用支付表

	保費基礎 (per premium)	保單基礎 (per policy)
第一年度	10%	100
續年度	2%	50

根據等價原則(equivalence principle)計算總保費(**捨去未滿一元部分**)。

(1) 2,918 (2) 2,725 (3) 2,651 (4) 2,316

24. (4) 產險公司根據以下家用機器人生命表開發保固保險。生命表中 l_x 表示使用x年正常運作的機器數量， d_x 表示使用x年的機器損壞數量。

機器使用年 x	l_x	d_x
0	1000	200
1	800	200
2	600	400
3	200	140
…	…	…

已知

- $A_3 = 0.8609$
- $i = 6\%$

若每年年初家用機器人正常運作則需準備維護成本 6,000 元，若家用機器人損壞則無需再準備維護成本。對於一台新的家用機器人，試求未來應準備的維護成本現值。

(1) 少於 12,000 (2) 介於 12,001 至 14,000
(3) 介於 14,000 至 16,000 (4) 大於 16,001

25. (2) 假設 x 歲保額 1,000 元的 10 年生死合險如下：

- 年繳保費 10 年
- 死亡保障於死亡發生的年末支付
- 準備金 $_{8}V = 890,\ _{9}V = 943$
- 死亡率 $q_{x+7} = 0.04,\ q_{x+8} = 0.05$

試計算 $_{7}V$

(1) 小於 831　　(2) 介於 832 至 843 之間
(3) 介於 844 至 855 之間　　(4) 大於 856

26. (2) 某餐廳一天的來客人數 X 服從卜瓦松(Poisson)分配$Poi(\theta)$，亦即

$$P(X=x)=\frac{e^{-\theta}\theta^{x}}{x!};\ \ \theta>0, x=0,1,2,\ldots$$

試求一天的來客人數為偶數的機率為何?

(1) $\frac{1}{2}\left(1+e^{-\theta}\right)$　(2) $\frac{1}{2}\left(1+e^{-2\theta}\right)$　(3) $\frac{1}{2}\left(1+e^{-3\theta}\right)$　(4) $\frac{1}{2}\left(1+e^{-4\theta}\right)$

27. (4) 假設隨機變數 $X_1,\ldots,X_n$ 獨立且服從常態(normal)分配 $N(\theta,\sigma^2)$，亦即

$$f(x;\theta,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}};\ \ -\infty<x<\infty, -\infty<\theta<\infty, \sigma^2>0,$$

其中 θ 與 σ^2 均未知。若定義 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$為$\sigma^2$的估計量。請問:當常數 $c>0$ 為多少時，$c\hat{\sigma}^2$ 會使得均方差(MSE; Mean Squared Error)達到最小?

(1) $\frac{n}{n-1}$　(2) $\frac{n+1}{n-1}$　(3) $\frac{n-1}{n}$　(4) $\frac{n-1}{n+1}$

28. (3) 假設隨機變數 $X_1,\ldots,X_n$ 獨立且服從相同的分配，其中 $E[X_i]=\theta$ 和 $Var[X_i]=\sigma^2$ 均為未知參數。若考慮 $\theta_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 與 $\theta_2=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}iX_i$ 為 θ 的兩個估計式，請評估θ_2相對於θ_1的相對有效性(relative efficiency)。

(1) $\frac{n-1}{n+2}$　(2) $\frac{3n+2}{2n+1}$　(3) $\frac{4n+2}{3n+3}$　(4) $\frac{7n+1}{5n+5}$

29. (1) 考慮一汽車保險的駕駛人分類費率模型，駕駛人被區分為優良體(preferred)以及標準體(standard)。若每一年度，一個年初為優良體的駕駛人在年底維持為優良體的機率是 60%，改變為標準體的機率是 40%；一個標準體駕駛人改變為優良體的機率是 30%，維持為標準體的機率是 70%。為了鼓勵駕駛人謹慎駕駛，該汽車保險人決定提供優良體駕駛人保費優惠，優惠的內容是立即提供優良體駕駛人 1,000 元的保費折價，而只要能夠持續維持為優良體，每年度的保費仍可以減少 1,000 元，一旦變成標準體則該項優惠永久消失，即便未來再回復為優良體仍無法獲得折價；而為了鼓勵現在為標準體的駕駛人，如果未來其變成優良體亦立即享有該項優惠，直至其又成為標準體為止。假設利率為 5%，並假設在期初該保險公司的被保險人有 25%為優良體，75%為標準體，請問此項優惠每被保險人之平均成本於期初是多少(不考慮死亡率以及脫退率)？

(1) 2,100 (2) 2,400 (3) 2,800 (4) 4,300

30. (2) 假設一 70 歲之被保險人其未來在各個狀態變化的機率如下表，其中 0 表示標準體、1 表示失能，2 表示死亡。考慮一保險公司發行一張三年期定期險，其給付內容如下：若被保險人於一保單年度初為標準體，而於該保單年度結束前死亡，則死亡保險金為 10 萬元；若被保險人於一保單年度初為標準體，而於該保單年度結束前發生失能，則領取失能保險金 5 萬元；此外，若被保險人於保單年度初為失能狀態，而於該保單年度結束前死亡，其死亡保險金為 5 萬元。假設各項給付皆在各年度期末發生，而保費於期初繳交(只有標準體需要繳交)，請問在折現率 $\nu = \frac{1}{1+i} = 0.95$ 之假設下，年繳純保費是多少？

x	p_x^{00}	p_x^{01}	p_x^{02}	p_x^{11}	p_x^{12}
70	0.98	0.01	0.01	0.95	0.05
71	0.97	0.01	0.02	0.9	0.1
72	0.96	0.01	0.03	0.8	0.2

(1) 2,180 (2) 2,400 (3) 2,870 (4) 3,570

（試題結束）