C5 精算模型

選擇題 40 題(每題 2.5 分):

1. (3) 某風險之損失金額服從 Poisson 分配(其平均值為 3 元)。假設某一種保險條件：每一損失金額之 ordinary deductible 為 2 元。另一種替代的保險則改以共同保險(coinsurance α)來取代 ordinary deductible，其中 α 值為該保險給付佔相關損失金額之比例，為使兩種保險預期之保險成本維持不變，請計算 α 值，下列有關該值之敘述何者為真？

   (1) 該值 < 0.39　　(2) $0.39 \leq$ 該值 < 0.41
   (3) $0.41 \leq$ 該值 < 0.43　　(4) $0.43 \leq$ 該值

2. (4) 某一損失之隨機變量 X 已知下列：

x	$F(x)$	$E(X \wedge x)$
0	0.0	0
100	0.2	91
200	0.6	153
1000	1.0	331

   下列敘述何者為真？

   (1) $e_X(100) < 290$　　(2) $290 \leq e_X(100) < 295$
   (3) $295 < e_X(100) < 300$　　(4) $e_X(100) \geq 300$

3. (1) 在某遊戲中，如果玩家得到 N 次成功($N = 0, 1, 2, 3,$ ...)，則玩家可以得到報酬 $W = 2^N$，且已知下列：
   (i) N 服從 Poisson 分配，且其平均值(mean) = Λ
   (ii) Λ 服從 Uniform 分配，且其值的區間為 (0,4)
   下列敘述何者為真？

   (1) $E(W) < 13.5$　　(2) $13.5 \leq E(W) < 13.6$
   (3) $13.6 \leq E(W) < 13.7$　　(4) $E(W) \geq 13.7$

4. (3) 某精算人員建立 compound claims frequency model 如下：
(i) The primary distribution 為 negative binomial 分配，其 probability generating function 如下：

$$P(z) = [1 + 3(z-1)]^{-2} \quad .$$

(ii) The secondary distribution 為 Poisson 分配，其 probability generating function 如下：

$$P(z) = e^{\lambda}(z-1) \ .$$

(iii) 沒有賠案的機率為 0.067
請計算 λ 值，下列有關該值之敘述何者為真？

(1) 該值 < 2.8　　(2) $2.8 \leq$ 該值 < 3.0
(3) $3.0 \leq$ 該值 < 3.2　　(4) $3.2 \leq$ 該值

5. (2) 某人運用模擬的技巧來產生隨機變量 X 的 1000 個值，過程如下：
(i) 由 Gamma 分配(其中 $\alpha = 2$ 及 $\theta = 1$，因此 mean＝2 及 variance＝2)來產生 λ 值。
(ii) 然後由 Poisson 分配(mean＝ λ)來產生的 x 值
(iii) 重複上述過程 999 次:首先產生一個 λ 值，然後再由 Poisson 分配(mean＝λ)來產生 x 值
(iv) 重複的過程是相互獨立的
請問模擬值 X 是 3 的期望次數為何？

(1) 該值 < 125　　(2) $125 \leq$ 該值 < 130
(3) $130 \leq$ 該值 < 135　　(4) $135 \leq$ 該值

6. (4) 假設每位司機每年的擋風玻璃索賠件數 N 服從 Poisson 分配(參數為 Λ)，且 Λ 服從 Gamma 分配(mean＝3 和 variance＝3)，請計算一位司機明年擋風玻璃索賠件數不超過 1 件的機率，而該機率 $\Pr(N \leq 1)$ 下列敘述何者為真？

(1) 該機率 < 0.30　　(2) $0.30 \leq$ 該機率 < 0.305
(3) $0.305 \leq$ 該機率 < 0.31　　(4) $0.31 \leq$ 該機率

7. (1) 已知某保險如下：
(i) 每年的損失件數服從 Poisson 分配(λ = 10)；
(ii) 每次損失金額均勻分佈於 (0, 10) 上(即 Uniform 分配)；
(iii) 損失件數與損失金額是相互獨立的；
(iv) 每一件損失金額之 ordinary deductible 為 4。
請計算一年內總保險給付金額的變異數(variance)，下列有關該值之敘述何者為真？

(1) 該值 < 72.5　　(2) $72.5 \leq$ 該值 < 75.5
(3) $75.5 \leq$ 該值 < 78.5　　(4) $78.5 \leq$ 該值

8. (1) 已知下列：

(i) 所有年度之損失服從 exponential 分配，且平均值皆相同

(ii) 今年度之 loss elimination ratio 為 70%

(iii) 明年度之 ordinary deductible 是今年度的 4/3

請計算明年度之 loss elimination ratio，下列有關該 ratio 之敘述何者為真？

(1) 該 ratio < 0.81　　(2) $0.81 \leq$ 該 ratio < 0.82

(3) $0.82 \leq$ 該 ratio < 0.83　　(4) $0.83 \leq$ 該 ratio

9. (4) 某一保險公司提供兩種類型的保單：A 型及 B 型，且已知如下：

A 型	
損失金額	機率
100	0.65
200	0.35

B 型	
損失金額	機率
300	0.70
400	0.30

其中有 55%為 A 型，其餘則為 B 型。假設 ordinary deductible 為 125，請計算 loss elimination ratio，下列有關該 ratio 之敘述何者為真？

(1) 該 ratio $< 50\%$　　(2) $50\% \leq$ 該 ratio $< 51\%$

(3) $51\% \leq$ 該 ratio $< 52\%$　　(4) $52\% \leq$ 該 ratio

10. (1) 已知某一離散型的總損失隨機變量的分配如下：

x	0	25	50	75
$F_S(x)$	0.05	0.065	0.08838	0.12306

假設 $E(S) = 314.50$，請計算 $E[(S-100)_+]$，下列有關該期望值之敘述何者為真？

(1) 該期望值 < 223　　(2) $223 \leq$ 該期望值 < 225

(3) $225 \leq$ 該期望值 < 227　　(4) $227 \leq$ 該期望值

11. (3) 某保險有 100 個保單，其中每一保單的理賠機率為 0.20；當發生理賠時，理賠金額服從 Pareto 分配(參數 $\alpha = 3$ 且 $\theta = 1000$)。請計算總賠款給付之變異數(variance)，下列有關該變異數之敘述何者為真？

(1) 該變異數 $< 18{,}500{,}000$　　(2) $18{,}500{,}000 \leq$ 該變異數 $< 19{,}000{,}000$

(3) $19{,}000{,}000 \leq$ 該期望值 $< 19{,}500{,}000$　　(4) $19{,}500{,}000 \leq$ 該期望值

12. (4) 某一群保單有下列的賠款金額：

100 100 100 200 300 300 300 400 500 600

請計算 $H(300)$ 的經驗估計值(empirical estimate)，而該值下列敘述何者為真？

(1) 該值 < 1.0 (2) $1.0 \leq$ 該值 < 1.1
(3) $1.1 \leq$ 該值 < 1.2 (4) $1.2 \leq$ 該值

13. (1) 已知下列：

賠款金額區間	賠款件數
(0, 25]	25
(25, 50]	28
(50, 100]	15
(100, 200]	6

假設每一賠款金額區間內的賠款金額為 Uniform 分配。請計算 $E(X^2) - E[(X \wedge 150)^2]$，而該值下列敘述何者為真？

(1) 該值 < 340 (2) $340 \leq$ 該值 < 350
(3) $350 \leq$ 該值 < 360 (4) $360 \leq$ 該值

14. (2) 理賠金額的樣本為{300, 600, 1500}。藉由對該樣本資料適用自負額，預估每一賠案於自負額為 100 的 loss elimination ratio 為 0.125，已知由樣本進行模擬得下列資料：

模擬	理賠金額
1	600 600 1500
2	1500 300 1500
3	1500 300 600
4	600 600 300
5	600 300 1500
6	600 600 1500
7	1500 1500 1500
8	1500 300 1500
9	300 600 300
10	600 600 600

請計算 bootstrap approximation 的 mean square error，而該值下列敘述何者為真？

(1) 該值 < 0.0029 (2) $0.0029 \leq$ 該值 < 0.0030
(3) $0.0030 \leq$ 該值 < 0.0031 (4) $0.0031 \leq$ 該值

15. (1) X_1, X_2, X_3 皆服從 Gamma 分配，其參數 (α, θ) 分別為 $(1, 0.1)$、$(2, 0.1)$、$(4, 0.1)$，若 $S = X_1 + X_2 + X_3$，求其 moment generation function $M_S(4) =$?

(1) 35.72 (2) 59.4 (3) 123.6 (4) 244.14

16. (2) X 服從 Pareto 分配，其參數 (θ, α) 為 $(100,\ 2)$，求其 $\mathrm{TVaR}_{90\%} =$?

(1) 430.19 (2) 532.46 (3) 638.95 (4) 794.43

17. (2) 若有一負二項分配，其參數 $\beta = 1,\ \gamma = 2.5$，若使用 $P_k/P_{k-1} = a + b/k$ 之公式， 且已知 zero-truncated random variable 之 ${P_2}^T = 0.23487$，且 ${P_0}^M$=0.2，則 zero-truncated modified random variable 之 ${P_2}^M =$?

(1) 0.21474 (2) 0.18790 (3) 0.43487 (4) 0.04697

18. (2) 若二項分配、負二項分配及 Poisson 分配具有相同的平均數時，何者的變異數較大?

(1) 二項分配 (2) 負二項分配 (3) Poisson 分配 (4) 無法比較

19. (2) 對一風險，在單一的暴露期間內，理賠可能次數及其機率如下表，

理賠次數	機率
0	60%
1	30%
2	10%

假如只有 1 次理賠發生，理賠金額為 100 的機率為 60%，理賠金額為 150 的機率為 40%，假如有 2 次理賠發生，每一次理賠金額的大小是彼此獨立的，而且理賠金額為 100 的機率為 50%，理賠金額為 150 的機率為 50%，求此風險的純保費變異數?

(1) 6,974 (2) 7,154 (3) 7,344 (4) 7,710

20. (3) 給定以下資訊：

- 單一被保險人的理賠次數服從平均為 0.5 的 Poisson 分配。
- 單一理賠的金額服從 $[0, 100]$ 的均勻分配。
- 理賠次數與理賠幅度彼此獨立。

求此被保險人的過程變異數?

(1) 417　(2) 833　(3) 1,667　(4) 3,333

21. (2) 給定以下資訊：

- 理賠次數服從 Poisson 分配。
- 理賠幅度有以下分配：

理賠金額	機率
10	60%
20	30%
50	10%

- 理賠次數與理賠幅度彼此獨立。

符合總理賠金額有 95% 的機率會落在預期值的 10% 之內的理賠次數較接近?

(1) 300　(2) 600　(3) 900　(4) 1200

22. (3) 給定以下資訊：

- 理賠次數服從負二項分配，且平均數是變異數的 0.5 倍。
- 理賠幅度有以下分配：

理賠金額	機率
10	50%
20	30%
40	20%

- 理賠次數與理賠幅度彼此獨立。

符合總理賠金額有 95% 的機率會落在預期值的 10% 之內的理賠次數與下列那個答案較接近?

(1) 226　(2) 3,623　(3) 906　(4) 638

23. (3) 若每位考生可選兩個多種面數的骰子，但兩個必需有相同面數，有 60% 選到 4 面的，有 30% 選到 6 面的，有 10% 選到 8 面的，且骰子分別標上數字 1~4、1~6、1~8，對每一個骰子，每一面有相同被擲出來的機會(也就是說骰子是公正的)，且每投一次骰子的 EPV 為 2.15 而 VHM 為 0.45。請每位考生報告點數和，則考生報告結果的預期總變異數 =?

(1) 10.4　(2) 5.2　(3) 6.1　(4) 2.6

24. (3) 使用兩個六面的骰子 A_1 及 A_2 來決定理賠的次數，骰子 A_1 理賠 0 次的機率為 $5/6$，理賠 1 次的機率為 $1/6$，骰子 A_2 理賠 0 次機率的為 $3/6$，理賠 1 次的機率為 $3/6$。又使用兩個輪盤 B_1 及 B_2 來決定理賠幅度，其幅度及其發生機率如下：

	理賠金額	
輪盤	30	60
B_1	0.7	0.3
B_2	0.4	0.6

單次的觀察包含從 A_1 及 A_2 隨機選一個骰子，並於骰子出現理賠 1 次後隨機選一個輪盤以決定幅度，則純保費過程變異數的期望值(EPV)為何?

(1) 424.44 (2) 398.75 (3) 439.38 (4) 535.94

25. (3) 使用兩個六面的骰子 A_1 及 A_2 來決定理賠的次數，骰子 A_1 理賠 0 次的機率為 $5/6$，理賠 1 次的機率為 $1/6$，骰子 A_2 理賠 0 次機率的為 $3/6$，理賠 1 次的機率為 $3/6$。又使用兩個輪盤 B_1 及 B_2 來決定理賠幅度，其幅度及其發生機率如下：

	理賠金額	
輪盤	50	100
B_1	0.6	0.4
B_2	0.7	0.3

單次的觀察包含從 A_1 及 A_2 隨機選一個骰子，並於骰子出現理賠 1 次後隨機選一個輪盤以決定幅度，則純保費假設平均數的變異數(VHM)為何?

(1) 32.679 (2) 69.063 (3) 127.431 (4) 277.778

26. (4) 令 X 是單次試驗的結果，且令 $E[X_2|X_1]$ 為第 2 次試驗結果的期望值，並有以下資訊：

試驗結果 ＝ T	$P(X_1 = T)$	$E[X_2|X_1 = T]$ 的貝式估計值
1	5/8	2.4
4	2/8	3.6
16	1/8	?

請問 $E[X_2|X_1 = 16] =$ ？

(1) 4.8 (2) 6.60 (3) 9.8 (4) 14.8

27. (2) 有以下資訊：

(i) 某保單組合由 2,000 個獨立且有相同分配的風險所組成。

(ii) 每個風險的理賠次數服從具有變異數 λ 的 Poisson 分配。

(iii) 最近暴露期間前，λ 假設為具有參數 (α, θ) 的 Gamma 分配，$\alpha = 600$，$\theta = 1600$。

(iv) 最近暴露期間中，觀察到以下的損失經驗：

理賠次數	風險個數
0	1, 812
1	178
2	8
3	2

請問 λ 事後分配的平均數 = ？

(1) 0.111　(2) 0.222　(3) 0.333　(4) 0.444

28. (4) 有一分配一階動差 = m，二階動差 = $m + m^2$，三階動差 = $m + 3m^2 + m^3$。下列何者為上述分配之偏態(skewness)？

(1) m　(2) $m^{0.5}$　(3) 1　(4) $m^{-0.5}$

29. (1) 已知賠案件數是 Poisson 分配，損失大小是離散型的 Poisson 分配 (mean = 4) 賠案件數與損失大小是獨立。如選擇完全可信賠案數的標準是指賠案數在 95% 信賴區間 10% 誤差範圍內的賠案數。依古典可信度方法，請計算 40%可信度需要有多少賠案數 ？

(1) 小於 100　(2) 大於等於 100，小於 200

(3) 大於等於 200，小於 300　(4) 大於等於 300

30. (3) 出險頻率是 Poisson-Binomial 複合分配，已知 $\lambda = 1.2$，$q = 0.1$，$m = 4$。下列何者是機率生成函數(Probability Generating Function)？

(1) $\{1 + 0.1(z-1)\}^4$　(2) $\exp(1.2(z-1))$

(3) $\exp[1.2(\{1 + 0.1(z-1)\}^4 - 1)]$　(4) $\{1 + 0.1(\exp[1.2(z-1)] - 1\}^4$

31. (1) 賠案數是 Mixed Poisson 分配，且 Poisson 分配的 Meam 是在 [0, 5] 區間上的均勻分布。請計算有 2 個及 2 個以上賠案的機率有多少?

(1) 0.61　(2) 0.66　(3) 0.71　(4) 0.76

32. (4) N 是 Poisson 分配($\lambda = 2$)。請計算 $E[N|N > 1] =$?

(1) 2.6　(2) 2.7　(3) 2.8　(4) 2.9

33. (4) 假設損失的機率密度函數(probability density function)是

$$f(x) = x/18, \quad for\ 0 \le x \le 6,$$
$$f(x) = 0, \quad otherwise.$$

請計算自負額為 2 之loss elimination ratio(LER)為何?

(1) 小於 0.35　(2) 大於等於 0.35，小於 0.40
(3) 大於等於 0.40，小於 0.45　(4) 大於等於 0.45，小於 0.50

34. (2) 已知某一業務其損失分配函數在 1991 年時 $F(x) = 1 - x^{-5},\ x > 1$。從 1991 年到 1992 年有 10% 通貨膨脹影響所有的賠案。請計算 1992 年自負額為 1.2 之 LER (Loss Elimination Ratio)為何?

(1) 小於 0.850　(2) 大於等於 0.850，小於 0.870
(3) 大於等於 0.870，小於 0.890　(4) 大於等於 0.890，小於 0.910

35. (1) 損失是 LogNormal 分配($\mu = 7,\ \sigma = 0.8$)。請計算 $\mathrm{TVaR}_{0.995}$?

(1) 小於 12,000　(2) 大於等於 12,000，小於 13,000
(3) 大於等於 13,000，小於 14,000　(4) 大於等於 14,000

36. (4) 有下列觀察值: 0.1、0.2、0.5、1.0、1.3。請測試是否來自下列機率密度函數(probability density function)

$$f(x) = \frac{2}{(1+x)^3}\ , \quad x > 0.$$

請計算 Kolmogorov-Smirnov 統計值(statistic)?

(1) 0.06　(2) 0.12　(3) 0.17　(4) 0.19

37. (1) 有五個被保險人過去一年賠案數如下:

Anthony 沒有理賠、Danielle 沒有理賠、Kevin 有一個賠案、
Ryan 沒有理賠、Samantha 有一個賠案

假設 X 是眾數(the mode of size five),請用拔靴法(bootstrap)並採 MSE (mean-squared error) 估計 X 值 ?

(1) 0.32 (2) 0.34 (3) 0.36 (4) 0.38

38. (4) 有 5 個賠款 179、352、918、2835、6142。配適得到 Pareto 分配($\alpha = 1.5,\ \theta = 1000$),請計算 Anderson-Darling 統計值(statistic) ?

(1) 大於等於 0.35,小於 0.40 (2) 大於等於 0.40,小於 0.45
(3) 大於等於 0.45,小於 0.50 (4) 大於等於 0.50,小於 0.55

39. (4) 有 5 個沒有截斷的原始損失資料如下: 410、1924、2635、4548、6142。去配適一個分配相對得到配後的 5 個資料如下: 0.0355、0.4337、0.5659、0.7720、0.8559。請計算 Anderson-Darling 統計值(statistic) ?

(1) 0.15 (2) 0.20 (3) 0.30 (4) 0.35

40. (1) 已知有一些公司成立於 1940 年或之後:

A 公司,成立於 1951 年,在 2010 年還存在。
B 公司,成立於 1925 年,在 2010 年還存在。
C 公司,成立於 1908 年,在 1983 停業。
D 公司,成立於 1973 年,在 2005 停業。
E 公司,成立於 1893 年,在 1968 停業。
F 公司,成立於 1964 年,在 2010 年還存在。
G 公司,成立於 1879 年,在 2010 年還存在。

請用 Nelson-Aalen Estimator 去估計近似的公司成立於 2010 年, 在 2100 年還存在的機率?

(1) 47% (2) 50% (3) 53% (4) 56%

(試題結束)