

C1 機率

選擇題 40 題(每題 2.5 分):

1. (2) 若隨機變數 T 具均勻分配(uniform distribution) , 其區間為 $[1,10]$, $f(t)$ 為 T 之機率密度函數。請問 $f(5)$ 之值為何?

(1) $\frac{1}{10}$ (2) $\frac{1}{9}$ (3) $\frac{1}{5.5}$ (4) $\frac{1}{5}$

2. (2) 有一個骰子其出現奇數的機率是出現偶數的 1.5 倍, 今擲骰子一次, 出現數字大於等於 4 的機率大約為何?

(1) 0.37 (2) 0.47 (3) 0.57 (4) 0.67

3. (1) 若 $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.5$, $P(B|A) = 0.4$, 則 $P(A^c \cap B^c)$ 為何?

(1) 0.14 (2) 0.26 (3) 0.74 (4) 0.76

4. (1) 設某保險一年發生理賠之件數 X 為卜瓦松(Poisson)分配, 平均一年發生理賠之件數為 16 件。試問 X 的變異係數?

(1) 0.25 (2) 0.5 (3) 8 (4) 16

5. (1) 設隨機變數 X 的機率分配函數為

$$f_X(x) = 0.75(0.25)^x, \quad x = 0, 1, 2, 3, \dots。$$

試問 $P(X \geq 7|X \geq 5)$ 為何?

(1) 0.0625 (2) 0.4375 (3) 0.5625 (4) 0.9375

6. (3) 離散均勻隨機變數 X 的數值為 3^k , $0 \leq k \leq 2$, X 的期望值為何?

(1) 3 (2) 11/3 (3) 13/3 (4) 9

7. (1) 假設 Y 機率密度函數(probability density function)如下：

$$f(y) = \frac{\theta}{c} \exp(-\theta|y|).$$

試求 c 的數值為何？

- (1) 2 (2) 1 (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{1}{4}$

8. (2) 文哲騎機車到加油站加油。假設遇到沒有人排隊和一個人在前面加油的機率都是 $1/2$ 。假設加油的時間分佈為指數分布，平均時間為三分鐘。請問文哲等待開始加油的時間少於三分鐘的機率大約為何？

- (1) 0.72 (2) 0.82 (3) 0.92 (4) 1

9. (4) 若隨機變數 X, Y 具聯合機率質量函數(joint probability mass function)如下表，請問 $E(Y)$ 之值為何？

$f_{XY}(x, y)$		y			
		1	10	50	100
x	-1	0.05	0.05	0.01	0.01
	2	0.1	0.05	0.05	0.1
	3	0.1	0.04	0	0
	4	0.15	0.14	0.1	0.05

- (1) 24.5 (2) 25.6 (3) 26.6 (4) 27.2

10. (4) 若 $f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{9}, & (x, y) = (1,1), (2, 2), (3, 3) \\ \frac{1}{9}, & (x, y) = (1, 3), (2, 1), (3, 1) \end{cases}$ ，試問 $P(X = 1 | Y = 1)$ 為何？

- (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{1}{2}$

11. (4) 假設 Y 為 0 到 1 之間的均勻分布， $Z=f(Y)$ ，而 $f(y) = \begin{cases} 1, & y \leq 1/3, \\ 2, & y > 1/3. \end{cases}$ 試問 Z 的期望值為何？

- (1) $1/3$ (2) $2/3$ (3) 1 (4) $5/3$

17. (4) 已知隨機變數 X 之機率密度函數 $f(x)$ 如下

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^3 e^{-\beta x} & , x > 0, \\ 0 & , \text{其他.} \end{cases}$$

請問此隨機變數之眾數(mode)為何?

- (1) $\frac{\beta}{\alpha}$ (2) $\frac{\alpha}{\beta}$ (3) $\frac{\beta}{3}$ (4) $\frac{3}{\beta}$

18. (4) 若隨機變數 T 具指數分配，其平均數為 1。請問 $E[T|T \geq E(T)]$ 為何?

- (1) 0 (2) 1 (3) 1.5 (4) 2

19. (4) 已知隨機變數 X 具標準常態分配，若 $Y = \ln X$ ，試求 $P(Y \leq 0)$ 之值。

- (1) 0.1963 (2) 0.2125 (3) 0.5123 (4) 0.8413

20. (4) 若 X 具指數分配(exponential distribution)，其 75 分位數為 $4 \ln 4$ ，請問其平均數為何?

- (1) 0.5 (2) 1 (3) 2 (4) 4

21. (4) 隨機變數 X 之動差生成函數(moment generating function)為

$$M(t) = 0.5 + 0.3e^{2t} + 0.2e^{5t}$$

試求 $P(X \leq 2)$ 之值。

- (1) 0.2 (2) 0.3 (3) 0.5 (4) 0.8

22. (4) 若隨機變數 (X, Y) 具二維常態分配(bivariate normal distribution)，其平均數為 $(\mu_X = 2, \mu_Y = 3)$ ，變異數為 $(\sigma_X^2 = 4, \sigma_Y^2 = 8)$ ，共變異數為 $\sigma_{XY} = -2$ 。請問 $P(2X + Y \leq 11)$ 之值為何?

- (1) 0.3413 (2) 0.5 (3) 0.6587 (4) 0.8413

23. (2) 若隨機變數 X 之累積機率分配函數(cumulative distribution function)如下

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0.25 + 0.2x, & 0 \leq x < 1, \\ 0.45 + 0.2x, & 1 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

請問 $P(X = 1)$ 之值。

- (1) 0 (2) 0.2 (3) 0.3 (4) 0.4

24. (1) 若隨機變數 (X, Y) 具二維常態分配(bivariate normal distribution)，其平均數為 $(\mu_X = 3, \mu_Y = 5)$ ，變異數為 $(\sigma_X^2 = 1, \sigma_Y^2 = 4)$ ，相關係數為 $\rho_{XY} = 0.5$ 。請問 $Var(2X - Y - 3|X = 2)$ 之值為何？

- (1) 3 (2) 5 (3) 8 (4) 10

25. (1) 袋中有紅球三黑球二，兩人玩輪流取出一球不放回的遊戲，先得黑球者勝。試問先取者勝的機率為何？

- (1) 18/30 (2) 21/30 (3) 24/30 (4) 28/30

26. (1) 有一枚代幣，正面是 50 元，反面是國父像，投擲代幣出現 50 元的機率是 2/3。遊戲規則為玩家投擲兩次代幣，如果出現次序為 50 元-國父像算玩家贏，出現次序為國父-50 元算莊家贏，其他情形則進行下一輪再投兩次，直到有輸贏為止。試問莊家贏的機率為何？

- (1) 1/2 (2) 2/3 (3) 3/4 (4) 4/5

27. (3) Alphago 和 Betago 下圍棋。單盤棋以往的紀錄 Alphago 贏的機率 0.3，Betago 贏的機率 0.4，和棋的機率是 0.3。這次比賽如果和棋就再下，連續五次和棋就停止比賽。試問 Alphago 贏的機率為何？

- (1) 0.300 (2) 0.328 (3) 0.428 (4) 0.528

28. (2) 令 Z_1 和 Z_2 為整數隨機變數，其均勻聯合分佈於範圍 $-2 \leq Z_1 \leq 4, -1 \leq Z_2 - Z_1 \leq 1$ ，試問隨機變數 Z_1 的期望值為何？(四捨五入取至整數)

- (1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3

29. (1) Y 為隨機變數，其密度函數為

$$f(y) = \begin{cases} \frac{y}{4}, & 1 < y < 3, \\ 0, & \text{o. w.} \end{cases}$$

若事件 $E = \{Y | Y < 2\}$ ，試問 $E(Y|E)$ 為何？

- (1) 14/9 (2) 16/9 (3) 17/9 (4) 20/9

30. (1) X 和 Y 為隨機變數。其變異數 $Var(X) = 1$ 和 $Var(Y) = 2$ 。令 $Z_1 = X + Y$, $Z_2 = X - Y$ 。試問共變異數 $Cov(Z_1, Z_2)$ 為何？

- (1) -1 (2) 0 (3) 1 (4) 以上皆非

31. (4) X 具有動差生成函數(moment generating function)

$$M_X(S) = c \cdot \frac{3+4e^{2S}+2e^{3S}}{3-e^S},$$

試問 c 的數值為何？

- (1) 1 (2) 5/9 (3) 4/9 (4) 2/9

32. (3) X_1, \dots, X_{72} 為獨立相同 0 到 1 之間的均勻分布之隨機變數。

$$Y = \frac{(X_1 + \dots + X_{36}) - (X_{37} + \dots + X_{72})}{36}.$$

試求 $P(|Y - E(Y)| < 0.01)$ 近似值為何？

- (1) 0.017 (2) 0.107 (3) 0.117 (4) 0.147

33. (2) 若 A 與 B 獨立，且 $P(A) = 0.7$ ， $P(B^c | A) = 0.6$ ，則 $P(B)$ 為何？

- (1) 0.20 (2) 0.40 (3) 0.42 (4) 0.58

34. (1) 下列敘述何者正確？

- a. 若 $P(A^c | B) = P(A^c)$ ，則 $P(B|A) = P(B)$ 。
- b. 若 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ，則 $P(A^c | B) = P(A^c)$ 。
- c. 若 $P(A) = 0.6$ ， $P(B) = 0.3$ ，且 $P(A \cup B) = 0.9$ ，則 $P(A^c | B) = 0.4$ 。

- (1) a,b (2) b,c (3) a,c (4) a,b,c

35. (2) 若隨機變數 X 的機率函數為

$$f_X(x) = \frac{6-|7-x|}{c}, \quad x = 2, 3, 4, \dots, 12.$$

試問下列何者為 X 的變異數?

(1) $\frac{70}{11}$ (2) $\frac{105}{18}$ (3) $\frac{131}{22}$ (4) $\frac{227}{36}$

36. (3) 若隨機變數 X 的動差生成函數為 $M_X(t) = \frac{8}{8-t}$, $t < 8$ 。試問下列何者為 X 的第80百分位數?

(1) $8 \ln(5)$ (2) $5 \ln(8)$ (3) $\frac{1}{8} \ln(5)$ (4) $\frac{1}{5} \ln(8)$

37. (4) 若隨機變數 X 之機率分配函數為

$$f_X(x) = \frac{20!}{x!(20-x)!} (0.2)^x (0.8)^{20-x}, \quad x = 0, 1, \dots, 20.$$

令 $Y = 20 - X$, 試問 $P(Y \leq 18)$ 為何?

(1) 0.89798 (2) 0.91656 (3) 0.92618 (4) 0.93082

38. (3) 設 X, Y 為兩個獨立卡方(Chi-square)隨機變數, X 之均數為8, Y 之均數為6。試問 $P[X - Y \leq 4]$ 為何?

(1) 0.63212 (2) 0.72933 (3) 0.86466 (4) 0.95021

39. (2) 設 Z_1, Z_2 為兩個獨立之標準常態分配。試問 $P[(Z_1 - Z_2)^2 + (Z_1 + Z_2)^2 > 5]$ 為何?

(1) 0.1353 (2) 0.2865 (3) 0.3679 (4) 0.4724

40. (3) 設隨機變數 X 為分佈於 $(0, 1)$ 的均勻分配(uniform distribution)。若

$$P(Y = y \mid X = x) = \binom{30}{y} x^y (1-x)^{30-y}, \quad y = 0, 1, 2, \dots, 30, \text{ 試問 } Y \text{ 之變異數為何?}$$

(1) 70 (2) 75 (3) 80 (4) 85

(試題結束)