C4 壽險數學與數理統計

選擇題 30 題(第 1-25 題，每題 3 分；第 26-30 題，每題 5 分):

1. (1) 假設某事件的發生次數($N(t)$)服從期望值為 $m(t) = 2t$ 的卜瓦松(Poisson)分配，T_j表示等候到第 j 件事件所需要的等待時間，請計算 $\Pr\{T_2 > 1.5\}$？

   (1) 0.20　(2) 0.34　(3) 0.41　(4) 0.56

2. (2) 某保險公司的秘書每分鐘可以打 100 個字，但每小時會出現 6 個錯字。請問，若老闆交代一份 500 個字的保險契約需要重新打字，這位秘書完全沒有錯誤的機率為何?

   (1) $e^{-0.3}$　(2) $e^{-0.5}$　(3) $1 - e^{-0.3}$　(4) $1 - e^{-0.5}$

3. (3) 已知 $M|\Lambda$ 服從期望值為 Λ 之 Poisson 分配，且 Λ 服從(2,3)區間內的均勻分配，請計算M的變異數？

   (1) 2.50　(2) 2.54　(3) 2.58　(4) 2.62

4. (3) 令 $S_1(t) = \sum_{j=1}^{N_1(t)} X_{1,j}$ 與 $S_2(t) = \sum_{j=1}^{N_2(t)} X_{2,j}$ 是兩個相互獨立的複合卜瓦松過程（compound Poisson process），其中 $N_1(t)$ 與 $N_2(t)$ 分別服從期望值為 5 與 10 之 Poisson 分配，X_1 代表第一類被保險人的損失金額，X_2 代表第二類被保險人的損失金額。請問前五次損失都來自於第二類被保險人的機率是多少？

   (1) 0.03　(2) 0.07　(3) 0.13　(4) 0.17

5. (3) 令隨機變數$X_1,\ldots,X_n$獨立且服從相同的分配，其中$\mathrm{E}[X_i]=\theta\in\mathbb{R}$ 和$\mathrm{Var}[X_i]=\sigma^2>0$；$i=1,\ldots,n$ 均為未知參數且 $n>4$。若 $T_1=\frac{X_1+2X_2+X_3}{4}$， $T_2=\frac{X_1}{4}+\frac{X_2+\cdots+X_{n-1}}{2(n-2)}+\frac{X_n}{4}$， $T_3=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$，和 $T_4=\frac{2X_1+1X_2+2X_3}{5}$ 為未知參數 θ 的四個估計式。試問哪一個估計式具有最小的均方差(MSE；Mean Square Error)?

(1) T_1 (2) T_2 (3) T_3 (4) T_4

6. (2) 假設隨機變數 $X_1,\ldots,X_n$ 獨立且服從相同機率密度函數 $f(x;\theta)=\frac{1}{2}e^{-|x-\theta|}$，其中，$-\infty<\theta<\infty$ 且 $-\infty<x<\infty$。若樣本數 $n=7$ 且 $x_1=3$， $x_2=-7$， $x_3=7$， $x_4=7$， $x_5=5$， $x_6=-3$ 和 $x_7=9$ 為觀測值，試求 θ 的最大概似估計值(MLE；Maximum Likelihood Estimate)為何？

(1) -7 (2) 5 (3) 3 (4) 9

7. (1) 假設隨機變數$X_1,\ldots,X_n$ 獨立且服從常態分配$N(\theta,\sigma^2)$，現欲檢定$H_0{:}\,\theta=0$ 對 $H_1{:}\,\theta=-1$。設樣本數 $n=20$ 且檢定規則為：若 $\bar{X}<-1$ 則拒絕H_0，否則就接受H_0。請問此檢定的型 II 誤差機率為何?

(1) 0.5 (2) 0.45 (3) 0.3 (4) 0.25

8. (2) 假設隨機變數 $X_1,\dots,X_n$ 獨立且服從常態分配 $N(0,\sigma^2)$，現欲檢定 $H_0:\sigma=\sigma_0$ 對 $H_1:\sigma\neq\sigma_0$，且建議的雙邊檢定規則如下:

如果 $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 < c_1$ 或 $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 > c_2$，則拒絕$H_0$。

若定義符號 $X_\alpha^2(\gamma)$ 滿足 $\mathrm{P}\left(X^2(\gamma) > X_\alpha^2(\gamma)\right)=\alpha$，其中隨機變數 $X^2(\gamma)$ 服從自由度為 γ 的卡方(chi-square)分配。則 $(c_1,\ c_2)$ 該如何取值才能使此檢定的顯著水準為 α。

(1) $\left(\sigma_0^2 X_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1),\ \sigma_0^2 X_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)\right)$ (2) $\left(\sigma_0^2 X_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n),\ \sigma_0^2 X_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)\right)$

(3) $\left(\sigma_0^2/X_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1),\ \sigma_0^2/X_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)\right)$ (4) $\left(\sigma_0^2/X_{\frac{\alpha}{2}}^2(n),\ \sigma_0^2/X_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)\right)$

9. (2) 假設隨機變數$X_1,\dots,X_n$獨立且服從常態(normal)分配 $\mathrm{N}(\theta,\sigma^2)$，亦即

$$f(x;\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}};\ -\infty<x<\infty,\ -\infty<\theta<\infty,$$

且 θ 的先驗(prior)分配為 $\mathrm{N}(\theta_0,\sigma_0^2)$，其中 σ^2、θ_0、σ_0^2 為已知參數。在絕對誤差損失(absolute error loss)函數的考量下，下列敘述何者有誤?

(1) θ 的後驗分配為常態分配

(2) θ 的(1-α)%貝氏區間與(1-α)%信賴區間相同

(3) θ 的貝氏估計量為θ的後驗分配之中位數

(4) θ 的貝氏估計量為θ的後驗分配之期望值

10. (4) 假設某銅板出現正面的機率為 θ，今隨機投擲此銅板 n 次且令隨機變數 Y 表示 n 次投擲中出現正面的次數。若考慮估計θ的估計式為 $T(Y) = \mathrm{a}Y + \mathrm{b}$ 且定義損失函數為：

$$L(\theta,T)=\frac{(\theta-T)^2}{\theta(1-\theta)}\ ;\ \theta\in(0,1)$$

此外，令 θ 的先驗(prior)分配為 Beta(2,3)，其機率密度函數為

$$\pi(\theta)=\frac{\Gamma(5)}{\Gamma(2)\Gamma(3)}\theta(1-\theta)^2;\ \theta\in(0,1)$$

試問 (a,b) 該如何取值才能使估計式 $T(Y)$ 成為貝氏估計量。

(1) $\left(\frac{3}{n+5},\frac{1}{n+5}\right)$ (2) $\left(\frac{2}{n+6},\frac{3}{n+6}\right)$ (3) $\left(\frac{1}{n+2},\frac{2}{n+2}\right)$ (4) $\left(\frac{1}{n+3},\frac{1}{n+3}\right)$

11. (3) 假設第$30+t$歲的死亡力函數 μ_{30+t} 如下:

$$\mu_{30+t}=\frac{1}{100+t},$$

請問${}_{10|20}q_{35}$為何?

(1) 0.1524 (2) 0.1421 (3) 0.1353 (4) 0.1277

12. (2) 假設

- $l_{50.5}=1200$
- $l_{51}=1100$
- 50 歲到 50.5 歲之間的死力(force of mortality)為 $m-0.01$
- 50.5 歲到 51 歲之間的死力為 m

試計算 50 歲的人數。

(1) 1300 (2) 1303 (3) 1306 (4) 1309

13. (1) 假設牛隻第一年的死亡率為 0.1，在 UDD 的假設下，試求牛隻 6 個月內的完整平均餘命 $\mathring{e}_{x:\overline{0.5|}}$ 為何?

(1) 0.488 (2) 0.475 (3) 0.495 (4) 0.464

14. (4) 若火象星座、土象星座、風象星座、水象星座共 10,000 人。若 1,000 位 30 歲火象星座的死亡年齡服從均勻分配 (30, 90)，2,000 位 40 歲土象星座的死亡年齡服從均勻分配 (40, 90)，3,000 位 25 歲風象星座的死亡年齡服從均勻分配 (25, 105)，4,000 位 50 歲水象星座的死亡年齡服從均勻分配 (55, 110)。試求 10,000 人在 60 歲到 70 歲死亡人數期望值。

(1) 1521 (2) 1669 (3) 1870 (4) 2031

15. (1) 假設智慧手機第一年被更換的機率 0.20，第二年被更換的機率 0.50，第三年被更換的機率 0.80。試在 UDD 的假設下求智慧手機 3 年內的平均使用年限。

(1) 介於 1.5 年至 1.8 年 (2) 介於 1.8 年至 2.1 年
(3) 介於 2.1 年至 2.5 年 (4) 大於 2.5 年

16. (3) 假設有一個 60 歲的團體，該團體有一萬人，並具有下列多種脫退之特徵：

年齡(x)	因疾病死亡 $q_x^{(1)}$	因意外死亡 $q_x^{(1)}$	因其他原因死亡 $q_x^{(1)}$
60	0.01	0.02	0.01
61	0.01	0.03	0.02
62	0.02	0.04	0.03
63	0.03	0.05	0.04
64	0.04	0.06	0.05
65	0.05	0.07	0.06

試求該 60 歲團體在 64 歲時因意外死亡的人數?

(1) 未達 400 人　(2) 高於 400 人，但未達 425 人
(3) 高於 425 人，但未達 450 人　(4) 高於 450 人

17. (1) 假設一 3 狀態模型(3-state model)表示 x 歲者癌症發展狀況，其中狀態 0 表示健康，狀態 1 表示罹患癌症，狀態 2 表示死亡，並且

$$\mu_{x+t}^{01} = \frac{0.6}{50-t}, \qquad t < 50$$

$$\mu_{x+t}^{02} = \frac{0.4}{50-t}, \qquad t < 50$$

$$\mu_{x+t}^{12} = \frac{0.5}{50-t}, \qquad t < 50$$

試計算健康的x歲人 10 年後的狀態為罹癌的機會。

(1) 小於 0.20　(2) 0.2 與 0.25 之間　(3) 0.25 與 0.30 之間　(4) 大於 0.30

18. (3) 考慮一組馬可夫鍊的轉移機率矩陣(transition-probability matrixes)如下，Q_t 表示由時間點 t到時間點$t+1$之狀態轉換情形，第 i 列第 j 行表示由狀態 i 至狀態 j 的轉移機率：

$$Q_0=\begin{bmatrix}0.8 & 0.1 & 0.1 & 0\\ 0.2 & 0.6 & 0.1 & 0.1\\ 0 & 0 & 0.8 & 0.2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ Q_1=\begin{bmatrix}0.7 & 0.2 & 0.10 & 0\\ 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0.1\\ 0 & 0 & 0.7 & 0.3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$Q_2=\begin{bmatrix}0.6 & 0.2 & 0.1 & 0.1\\ 0.2 & 0.4 & 0.3 & 0.1\\ 0 & 0 & 0.6 & 0.4\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ Q_3=\begin{bmatrix}0.5 & 0.2 & 0.2 & 0.1\\ 0.2 & 0.3 & 0.3 & 0.2\\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

假設期初($t=0$)是在狀態 2，請計算期末($t=4$)是狀態 3 的機率？

(1) 0.1012　(2) 0.1680　(3) 0.2282　(4) 0.1380

19. (4) 在下列已知假設前提下：

- $A_{50:\overline{20|}}=0.42$
- $A^{1}_{50:\overline{20|}}=0.15$
- $A_{50}=0.31$

試算 $1000A_{70}$ 為何？

(1) 563　(2) 584　(3) 580　(4) 593

20. (2) 某一團體保險的內容如下：

- Z：終身保險 1 單位死亡發生時立即支付之現值
- μ的值介於 0.01 與 0.03 之間的均勻分配(uniform distribution)
- $\delta = 0.04$

計算 $E(Z)$。

(1) 0.5621 (2) 0.3271 (3) 0.2561 (4) 0.1891

21. (3) 考慮 x 歲 10 年期遞延即期年金(10-year deferred life annuity-due)

- 每年年金 1,000 元
- 前 10 年每年繳保費
- 年繳純保費(net premium) 800 元
- 費用率 5%
- 年金支付十的費用 10.5 元

利用等價原理(equivalence principle)計算總保費(gross premium)。

(1) 小於 784 (2) 介於 785 至 819 之間 (3) 介於 820 至 855 之間 (4) 大於 856

22. (2) 考慮一個保費年繳之終身壽險，保額 150,000 元，死亡保險金在各保單年度末給付。已知被保險人投保年齡為(x)，$A_x = 0.067$，${}^2A_x = 0.014$，且保費依據等價原則(equivalence principle)計算，請計算 L_0^n 之標準差？

(1) 16,080 (2) 15,680 (3) 15,220 (4) 14,820

23. (3) 假設 $l_x = 1000(103.4 - x),\ 0 \le x \le 103.4$。已知 $v=0.96$。若終身壽險的保險金於死亡年末支付，試求 55 歲保額 1,000,000 終身壽險的躉繳保費。

(1) 少於 36 萬　(2) 介於 36 萬與 40 萬　(3) 介於 40 萬與 45 萬　(4) 大於 40 萬

24. (3) 考慮一個兩個狀態(狀態 1 與狀態 2)之馬可夫鍊，其移轉機率矩陣(transition-probability matrixes)可表示如下：

$$Q = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$$

假設目前的狀態是 1，在未來的 2 期，只要在狀態 1 就可以獲得 1 元。假設 $\nu = 0.95$，請問未來 2 期的現金流量現值為何？

(1) 0.25　(2) 0.93　(3) 1.36　(4) 1.52

25. (4) 考慮一組馬可夫鍊的轉移機率矩陣(transition-probability matrixes)如下，Q_t 表示由時間點t到時間點$t+1$之狀態轉換情形，第 i 列第 j 行表示由狀態 i 至狀態 j 的轉移機率。令 $\nu = 0.9$，${}_{t+1}C^{(i,j)}$表示若在時間點t到時間點$t+1$是由狀態 i 轉換至狀態 j 時所應給付之現金流量，假設此現金流量與時間(t)無關，${}_{t+1}C^{(i,j)} = C^{(i.j)}$，且 $C^{(i.j)}$ 之值如下(矩陣C)所述：

$$Q_0 = \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.7 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ Q_1 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.7 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad C = \begin{bmatrix} 0 & 100 & 100 \\ 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

已知目前的狀態是 1，請問所有未來給付的精算現值是多少？

(1) 80.69　(2) 85.80　(3) 92.36　(4) 97.46

26. (1) 兩獨立隨機變數 T_A 和 T_B 分別表示 A 製程與 B 製成生產之燈泡的壽命時間，其分配分別假設為參數 θ_A 和 θ_B 的指數(Exponential)分配，亦即 $T_A \sim Exp(\theta_A)$ 和 $T_B \sim Exp(\theta_B)$。為了了解那一個製程生產的燈泡品質較差，研究人員定義隨機變數 $Z = \min\{T_A, T_B\}$。請問，隨機變數 Z 的分配為何?

(1) $Exp(\theta_A+\theta_B)$　(2) $Exp(\min\{\theta_A, \theta_B\})$　(3) $Exp(\theta_A)$　(4) $Exp(\theta_B)$

27. (4) 假設隨機變數 $X_1, \ldots, X_n$ 獨立且服從常態(normal)分配 $N(\theta, \sigma^2)$，其中 θ 與 σ^2 均未知。已知 $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ 為 σ^2的最大概似估計量(MLE)且 $T = \frac{nS^2}{\sigma^2}$ 服從自由度為 $n-1$ 的卡方分配(Chi-square distribution)。請問 σ 的不偏估計式為何?

(1) $\frac{\sqrt{n-1}\Gamma(\frac{n}{2})S}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}$　(2) $\frac{\sqrt{n}\Gamma(\frac{n-1}{2})S}{\Gamma(\frac{n}{2})}$　(3) $\frac{\sqrt{n-1}\Gamma(\frac{n}{2})S}{\sqrt{2}\Gamma(\frac{n-1}{2})}$　(4) $\frac{\sqrt{n}\Gamma(\frac{n-1}{2})S}{\sqrt{2}\Gamma(\frac{n}{2})}$

28. (4) 令 X_1 與 X_2 獨立且服從均勻分配Uniform$(\theta, \theta+1)$。現欲檢定$H_0: \theta = 0$ 對 $H_1: \theta > 0$ ，且考慮兩個檢定規則如下：(a)如果 $X_1 > 0.9$ 則拒絕 H_0；(b)如果 $X_1+X_2 > c$ 則拒絕 H_0。請問 c 值該如何取才能使上述兩個檢定規則具有相同的顯著水準?

(1) 1.5　(2) 3-$\sqrt{0.5}$　(3) 2.7　(4) 2-$\sqrt{0.2}$

29. (2) 利用一 3 狀態離散型馬可夫鏈(3-state discrete Markov chain)描述公司印表機的功能狀況，其中狀態 0 表示正常，狀態 1 表示故障，狀態 2 表示報廢，並且

$$p^{01}=0.04,\quad p^{02}=0.01,\quad p^{10}=0.80,\quad p^{12}=0.1,\quad p^{2i}=0,\ i=0,1。$$

若時間 0 時功能正常的印表機 100 台，故障的印表機 10 台，試估算在時間 3 時報廢的印表機數量。(取最接近的整數)

(1) 3　(2) 5　(3) 7　(4) 9

30. (4) 在 CCRC(continuing care retirement community)模型中，假設月為時間單位。若所有開始加入的退休者均處於狀態 0：優良。狀態 1、2、3 分別表示退休者的健康狀態為優、佳、弱，每個月的支出分別為 40,000、50,000、60,000。當到達狀態 4：死亡時，一次支付 1,000,000。假設轉移距陣如下

$$\begin{array}{c}(0)\\(1)\\(2)\\(3)\end{array}\begin{bmatrix}0.96 & 0.02 & 0.01 & 0.01\\0.28 & 0.62 & 0.05 & 0.05\\0.00 & 0.00 & 0.92 & 0.08\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

在不考慮利息的情況下，對於剛進入 CCRC 的退休者，計算未來的期望支出。

(1) 少於 249 萬　(2) 250 萬至 274 萬　(3) 275 萬至 300 萬　(4) 大於 301 萬

（試題結束）