C1 機率

1.(4)若樣本空間 $S=\{1,2,3,4\}$ 且每一個樣本點之機率皆相同，茲定義 A,B,C 三個事件分別為 $A=\{1,4\}$，$B=\{2,4\}$ 及 $C=\{3,4\}$。下列敘述何者為真？

(1) A、B 兩事件獨立，但 A、C 兩事件不獨立

(2) A、B 兩事件獨立，但 B、C 兩事件不獨立

(3) A、B 兩事件獨立，A、C 兩事件獨立，B、C 兩事件獨立，故 A,B,C 三個事件相互獨立

(4) A、B 兩事件獨立，A、C 兩事件獨立，B、C 兩事件獨立，但 A,B,C 三個事件並不相互獨立

(易)

【計算過程】

$P(A)=1/2,\quad P(B)=1/2, P(C)=1/2$

$A\cap B=\{4\}\Rightarrow P(A\cap B)=1/4 \quad \therefore P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

$A\cap C=\{4\}\Rightarrow P(A\cap C)=1/4 \quad \therefore P(A\cap C)=P(A)\times P(C)$

$B\cap C=\{4\}\Rightarrow P(B\cap C)=1/4 \quad \therefore P(B\cap C)=P(B)\times P(C)$

但 $A\cap B\cap C=\{4\}\Rightarrow P(A\cap B\cap C)=1/4\neq P(A)\times P(B)\times P(C)$

【題目出處】

Hogg & Tanis (2009), Ch. 1

2.(2)若 X,Y 為獨立且具指數分配之隨機變數，其平均數分別 1 及 5。

若 $Z=\min\{X,Y\}$，試求 $P(Z>1)$

(1) e^{-1} (2) $e^{-1.2}$ (3) e^{-2} (4) e^{-5} (中)

【計算過程】

$$P(Z>1)=P[\min(X,Y)>1]=P(X>1,Y>1)=P(X>1)\times P(Y>1)=e^{-1}\times e^{-0.2}=e^{-1.2}$$

【題目出處】

Ross (2012), Ch. 6

3.(4)若兩個獨立隨機變數 U 及 V，且 4 次動差如下：

I. $E(U^4)=4, E(U^3)=2, E(U^2)=1, E(U)=0.5$

II. $E(V^4)=3, E(V^3)=2, E(V^2)=1, E(V)=0$

試求 $Var(U^2V)$

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4 (難)

【計算過程】

$$Var(U^2V)=E[(U^2V)^2]-[E(U^2V)]^2$$

其中，$E[(U^2V)^2]=E(U^4V^2)=E(U^4)E(V^2)=4\times 1=4$

$E(U^2V)=E(U^2)E(V)=0$

$\therefore Var(U^2V)=4$

【題目出處】

Hogg & Tanis (2009), Ch. 2, Ch. 4

4.(　1　)已知 A，B，C 三事件之機率如下：

$P(A\cap B\cap C)\neq 0$ 及 $P(C\,|\,A\cap B)=P(C\,|\,B)$

請問下列敘述何者為真？

(1) $P(A|B\cap C)=P(A|B)$

(2) $P(A|B\cap C)=P(A|C)$

(3) $P(B|A\cap C)=P(B|A)$

(4) $P(B|A\cap C)=P(B|C)$　　　(易)

【計算過程】

已知 $P(C\,|\,A\cap B)=P(C\,|\,B)$ ，故 $P(A\cap B\cap C)\times P(B)=P(A\cap B)\times P(B\cap C)$

(1) $P(A|B\cap C)=P(A|B)\Rightarrow P(A\cap B\cap C)\times P(B)=P(A\cap B)\times P(B\cap C)$

(2) $P(A|B\cap C)=P(A|C)\Rightarrow P(A\cap B\cap C)\times P(C)=P(A\cap C)\times P(B\cap C)$

(3) $P(B|A\cap C)=P(B|A)\Rightarrow P(A\cap B\cap C)\times P(A)=P(A\cap B)\times P(A\cap C)$

(4) $P(B|A\cap C)=P(B|C)\Rightarrow P(A\cap B\cap C)\times P(C)=P(A\cap C)\times P(B\cap C)$

故，(1) 之敘述為真

【題目出處】

Hogg & Tanis (2009), Ch. 1

5.(　3　)若 S 及 T 為兩個獨立，且具相同機率分配之隨機變數，其機率質量函數(probability mass function)函數為

$$f(t)=0.5^{t+1}, t=0,1,2,\cdots$$

試求 $P(S=T)$ 之值。

(1) 0 (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{1}{2}$　　　(中)

【計算過程】

$$P(S=T)=\sum_{t=0}^{\infty}P(S=T=t)=\sum_{t=0}^{\infty}(0.5)^{t+1}\times(0.5)^{t+1}=\frac{0.25}{1-0.25}=\frac{1}{3}$$

【題目出處】

Hogg & Tanis (2009), Ch. 2, Ch. 4

6.(　1　)若 X 與 Y 的聯合機率質量函數(joint probability mass function)如下表

聯合機率		Y			
		-1	0	1	3
X	-2	1/9	1/27	1/27	1/9
	0	0	0	1/9	4/27
	1	2/9	0	1/9	1/9

試求 $E(XY)$ 之值。

(1) $-\frac{8}{27}$ (2) 0 (3) $\frac{1}{27}$ (4) $\frac{1}{9}$ 　　(易)

【計算過程】

$$E(XY)=2\times\frac{1}{9}-2\times\frac{1}{27}-6\times\frac{1}{9}-1\times\frac{2}{9}+1\times\frac{1}{9}+3\times\frac{1}{9}=-\frac{8}{27}$$

【題目出處】

Hogg & Tanis (2009), Ch. 4

7.(　3　)若 X 為具卜瓦松分配(Poisson distribution)之隨機變數，其平均數為 2，試求 $E[(1+X)^{-1}]$ 之值。

(1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1-e^{-2}}{2}$ (4) $\frac{1+e^{-2}}{2}$ 　　(難)

【計算過程】

$$E[(1+X)^{-1}]=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{1}{1+x}\cdot\frac{e^{-2}2^{x}}{x!}=\frac{1}{2}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{e^{-2}2^{x+1}}{(x+1)!}=\frac{1}{2}\sum_{y=1}^{\infty}\frac{e^{-2}2^{y}}{y!}=\frac{1-e^{-2}}{2}$$

【題目出處】

Hogg & Tanis (2009), Ch. 2

8.(　2　)若某香菸之「烟焦油(X)」與「尼古丁(Y)」成分具二維常態分配，$\mu_X=4.1$，$\sigma_X=1.0$，$\mu_Y=0.5$，$\sigma_Y=0.4$ 毫克，且 $\rho=0.8$。試求 $P(X>4.9\,|\,Y=0.6)$ 之值。

(1) 0.0228　(2) 0.1587　(3) 0.5 (4) 0.6915　　(中)

【計算過程】

$$E(X\,|\,Y=0.6)=4.1+0.8\times\frac{1.0}{0.4}(0.6-0.5)=4.3$$

$$Var(X\,|\,Y=0.6)=1.0\times(1-0.8^{2})=0.6^{2}$$

$\Rightarrow X \mid Y = 0.6 \sim N(4.3, 0.6^2)$

$$P(X > 4.9 \mid Y = 0.6) = P(Z > \frac{4.9 - 4.3}{0.6}) = P(Z > 1) = 0.1587$$

【題目出處】
Hogg & Tanis (2009), Ch. 4

9.(　3　)若隨機變數 X 之機率分配為

$$f_X(x) = 0.3(0.7)^x, \quad x = 0, 1, 2, \cdots,$$

且

$$Y = \begin{cases} X, & X < 3 \\ 3, & X \geq 3 \end{cases}。$$

試求 $E(Y)$ 之值。

(1) $\frac{1}{3}$ (2) 0.504 (3) 1.41 (4) $\frac{7}{3}$ 　　(難)

【計算過程】

$$E(Y) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) + 3 \times P(X \geq 3)$$

$$= 0 \times 0.3 + 1 \times 0.3 \times 0.7 + 2 \times 0.3 \times 0.7^2 + 3 \times (1 - 0.3 - 0.21 - 0.147) = 1.41$$

【題目出處】
Hogg & Tanis (2009), Ch. 3

10.(　3　)若 X 之機率質量函數如下表，求 $P(X = -3 \mid X \leq 0)$ 之值。

x	-3	-1	0	1	3	5	7
$f(x)$	0.10	0.20	0.15	0.20	0.10	0.15	0.10

(1) $\frac{1}{10}$ (2) $\frac{2}{11}$ (3) $\frac{2}{9}$ (4) $\frac{1}{3}$ 　　(易)

【計算過程】

$$P(X = -3 \mid X \leq 0) = \frac{P(X = -3)}{P(X \leq 0)} = \frac{0.1}{0.45} = \frac{2}{9}$$

【題目出處】
Hogg & Tanis (2009), Ch. 1

11.(　4　)設X_1, X_2, X_3為三個獨立且相同分配之隨機變數，其機率密度函數為

$$f(x)=1 \text{，} 0<x<1\text{。}$$

令 $Y_i=-\ln(X_i)$，試求$P[\,min(Y_1, Y_2, Y_3)\le 1]$。

(1) 0.64646 (2) 0.85795 (3) 0.90646 (4) 0.95021　　　（難）

【計算過程】

因X_i為獨立且同為分布於(0,1)之均勻分配。

$$F_{Y_i}(y)=P(Y_i\le y)=P(-\ln(X_i)\le y)=P(X_i\ge e^{-y})$$

$$=1-e^{-y}\text{，}0<y<\infty$$

因此，$Y_i=-\ln(X_i)$ 為獨立且均數為 1 之指數分配。

故$P[\,min(Y_1, Y_2, Y_3)\le 1)=1-P[\,min(Y_1, Y_2, Y_3)>1)$

$$=1-P[\,Y_1>1, Y_2>1, Y_3>1]$$

$$=1-[e^{-1}]^3\approx 0.95021$$

【題目出處】Hogg & Tanis, Ch. 3, 4；Ross, 5, 7

12.(　3　)若 $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{200}$ 為獨立之標準常態分配，試求 $P({Z_1}^2+{Z_2}^2+\ldots+{Z_{200}}^2\le 220)$ 之值。

(1) 0.0000 (2)0.6915 (3) 0.8413 (4) 1.0000　　　(中)

【計算過程】

$$Z_i\sim(0,1)\Rightarrow Z_i^2\sim \text{Chi square, d.f.=1, } E(Z_i^2)=1, Var(Z_i^2)=2$$

$$\Rightarrow {Z_1}^2+{Z_2}^2+\ldots+{Z_{200}}^2\sim N(200,400)\ (\text{中央極限定理})$$

$$\Rightarrow P({Z_1}^2+{Z_2}^2+\ldots+{Z_{200}}^2\le 220)\approx P(Z\le\frac{220-200}{\sqrt{400}})=P(Z\le 1)=0.8413$$

【題目出處】

Hogg & Tanis (2009), Ch. 3, Ch.5

13.(　2　)投擲公允的銅板，亦即 P(人頭)=0.5，投擲直至第 100 個人頭出現。請問至少要投擲 226 次之機率近似值。

(1) 0.0013 (2) 0.0359 (3) 0.8849 (4) 1.0000　　　(難)

【計算過程】

令出現第一個人頭所需之投擲數為$Y_1\sim f(y)=0.5^y,\ y=0,1,2,\cdots$

出現第一個人頭後，重新起算，出現第二個人頭所需之投擲數為

$Y_2\sim f(y)=0.5^y,\ y=0,1,2,\cdots$

$\Rightarrow Y_1 + Y_2$ 為出現兩個人頭所需要的總投擲數，且 Y_1, Y_2 有相同機率、獨立

$\Rightarrow Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{100}$ 為出現 100 個人頭所需要的總投擲數，且 $Y_1, \cdots, Y_{100}$ 有相同機率、獨立

本題所求可以表示為 $P(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{100} \geq 226)$，其中 $E(Y_i) = 1,\quad Var(Y_i) = 2$

依中央極限定理

$$\Rightarrow P(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{100} \geq 226) \approx P(Z > \frac{225.5 - 100}{\sqrt{200}}) \approx P(Z > 1.80) = 0.0359$$

【題目出處】

Hogg & Tanis (2009), Ch. 2, Ch.5

14.(4)設X, Y為兩個獨立常態分配，其均數與標準差分別為

$$\mu_X = 1，\sigma_X = 1，\ \mu_Y = 3，\sigma_Y = 1。$$

試求

$$P[X^2 - 2X + Y^2 - 6Y < -8]$$

(1) 0.2865 (2) 0.3679 (3) 0.4724 (4) 0.63212 （難）

【計算過程】

$$P[X^2 - 2X + Y^2 - 6Y < -8] = P\left[\left(\frac{X-1}{1}\right)^2 + \left(\frac{Y-3}{1}\right)^2 < 2\right] = P\left[{Z_1}^2 + {Z_2}^2 < 2\right]，$$

Z_1 與Z_2 為兩獨立之標準常態分配，${Z_1}^2 + {Z_2}^2$為自由度 2 之卡方分配，也是均數為 2 之指數分配。故

$$P[X^2 - 2X + Y^2 - 6Y < -8] = P[{Z_1}^2 + {Z_2}^2 < 2]$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{2} e^{-w/2}\, dw = 1 - e^{-2/2} = 1 - e^{-1} \approx 0.63212。$$

【題目出處】Hogg & Tanis, Ch. 5

15.(4)若隨機變數 R 具常態分配，已知 $P(R \leq 3) = 0.5,\quad P(R \leq 4) = 0.6915$，請問其平均數及變異數分別為何？

(1) 0 及 2 (2) 2 及 4 (3) 3 及 2 (4) 3 及 4 (易)

【計算過程】

$$P(R \leq 3) = 0.5 \Rightarrow \mu = 3$$

$$P(R \leq 4) = 0.6915 \Rightarrow P(Z \leq \frac{4-3}{\sigma}) = 0.6915 \Rightarrow \frac{4-3}{\sigma} = 0.5 \Rightarrow \sigma = 2, \sigma^2 = 4$$

【題目出處】

Hogg & Tanis (2009), Ch. 3

16.(　1　)設X, Y為兩個獨立伽瑪分配(gamma distribution)隨機變數，其動差生成函數(moment generating function)分別為

$$M_X(t) = (1-2t)^{-8}，t < 1/2；M_Y(t) = (1-2t)^{-7}，t < 1/2。$$

試求$P[X - Y \leq 8 \mid X - Y > 6]$

(1) 0.63212 (2) 0.72933 (3) 0.86466 (4) 0.95021　（難）

【計算過程】

因X, Y為兩個獨立隨機變數，$\mathrm{X}-\mathrm{Y}$之動差生成函數

$M_{X-Y}(t) = E\left[e^{(X-Y)t}\right] = \frac{E\left[e^{Xt}\right]}{E\left[e^{Yt}\right]} = \frac{(1-2t)^{-8}}{(1-2t)^{-7}} = (1-2t)^{-1}$。因此，$X - Y$為均數為 2 之指數分配。故$\mathrm{P}[X - Y \leq 8 \mid X - Y > 6] = 1 - e^{-2/2} = 1 - e^{-1} \approx 0.63212$

【題目出處】Hogg & Tanis, Ch. 4, 5

17.(　3　)已知$F(x)$隨機變數X之累積機率分配如下，試求$P(0.5 < X \leq 1)$之值。

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{x}{5}, & 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{x}{2}, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

(1) 0.1 (2) 0.2 (3) 0.4 (4) 0.5　(中)

【計算過程】

$$P(0.5 < X \leq 1) = F(1) - F(0.5) = \frac{1}{2} - \frac{0.5}{5} = 0.4$$

【題目出處】

Hogg & Tanis (2009), Ch. 3

18.(　2　)今同時投擲兩枚均勻的六面骰子。試問投擲三次至少出現一次兩枚骰子點數相等之機率。

(1) 11/36 (2) 91/216 (3) 671/1296 (4) 4651/7766　（易）

【計算過程】

兩枚骰子點數相等的樣本點為: $\{(1,1)，(2,2)，(3,3)，(4,4)，(5,5)，(6,6)\}$，

其機率為 $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ 。

投擲三次至少出現一次的機率為$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216}$

【題目出處】Ross, Ch. 1, Ch. 2

19.(　2　)已知 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，試求 $P(|X-\mu|<\sigma)$ 之值。

(1) 0.1587 (2) 0.6830 (3) 0.8417 (4) 0.9544　　(易)

【計算過程】

$P(|X-\mu|<\sigma)=P(|Z|<1)=0.6830$

【題目出處】

Hogg & Tanis (2009), Ch. 3

20.(　3　)某地區的大小地震發生次數，具卜瓦松分配(Poisson distribution)，平均每年 36 次。請問該地區一個月期間的地震次數低於 2 次之機率。

(1) $13e^{-12}$ (2) $85e^{-12}$ (3) $4e^{-3}$ (4) $8.5e^{-3}$　　(中)

【計算過程】

令 X：一個月的地震次數~卜瓦松分配(3 次/月)

$$P(X<2)=P(X=0,1)=\frac{e^{-3}3^0}{0!}+\frac{e^{-3}3^1}{1!}=4e^{-3}$$

【題目出處】

Hogg & Tanis (2009), Ch. 2

21.(　3　)某工廠購買以 10 個產品裝一箱之貨物，其品管人員每箱隨機抽 3 個產品檢視。若 3 個產品均為良品，則整箱過關；否則整箱退貨。若一批貨物中有 30%的箱子內有 4 個不良品；70%的箱子內有 1 個不良品。試求退貨率?

(1) 0.167 (2) 0.45 (3) 0.54 (4) 0.70　　(中)

【計算過程】

$$0.3\times\frac{\binom{6}{3}\times\binom{4}{0}}{\binom{10}{3}}+0.7\times\frac{\binom{9}{3}\times\binom{1}{0}}{\binom{10}{3}}=\frac{0.3\times20+0.7\times84}{120}=0.54$$

【題目出處】

Hogg & Tanis (2009), Ch. 2, Ch.3

22.(　2　)若已知 $Y=y$，X 之條件機率密度函數為

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{1}{y}e^{-x/y},\quad x>0, y>0$$

試求 $P(X>1|Y=3)$ 之值。

(1) $\frac{1}{3}e^{-1/3}$ (2) $e^{-1/3}$ (3) $3e^{-1/3}$ (4) $1-e^{-1/3}$ (難)

【計算過程】

$f_{X|Y}(x|3)=\frac{1}{3}e^{-x/3},\quad x>0$

$P(X>1|Y=3)=\int_1^{\infty}\frac{1}{3}e^{-x/3}dx=e^{-1/3}$

【題目出處】

Hogg & Tanis (2009), Ch. 4

23.(1)若隨機變數T之累積機率分配函數如下：

$$F(t)=P(T\le t)=1-\sqrt{1-\frac{t}{10}},\quad 0\le t\le 10$$

試求機率密度函數(probability density function) $f(5)$之值為何？

(1) $\frac{\sqrt{2}}{20}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{10}$ (3) $\sqrt{2}$ (4) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (中)

【計算過程】

T之機率密度函數為

$$f(t)=\frac{1}{20}(1-\frac{t}{10})^{-0.5},\quad 0\le t\le 10$$

$\therefore f(5)=\frac{\sqrt{2}}{20}$

【題目出處】

Hogg & Tanis (2009), Ch. 3

24.(3)若隨機變數 X 具卜瓦松分配，其平均數 3。試求$E[X(X-1)]$之值。

(1) 3 (2) 6 (3) 9 (4) 12 (易)

【計算過程】

$E(X)=3,\quad Var(X)=3=E(X^2)-3^2\Rightarrow E(X^2)=12$

$E[X(X-1)]=E(X^2)-E(X)=12-3=9$

【題目出處】

Hogg & Tanis (2009), Ch. 3

25.(　1　)若某百貨公司的每分鐘到客人數為女性 6 人，男性 2 人。假設到客人數，具卜瓦松分配(Poisson distribution)且男女性獨立。試求下一位男性客人的機率。

(1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{3}{4}$ (4) e^{-2}　　(難)

【計算過程】

F:從現在開始到第一個女性顧客到來所需的時間~指數分配，平均 1/6 分鐘

M:從現在開始到第一個男性顧客到來所需的時間~指數分配，平均 1/2 分鐘

F 與 M 獨立

本題求　$P(F-M>0)=\int_0^\infty \int_0^f 6e^{-6f}\times 2e^{-2m}dm\,df$

$$=\int_0^\infty 6e^{-6f}[1-e^{-2f}]df=1-\frac{6}{8}=\frac{1}{4}$$

【題目出處】

Hogg & Tanis (2009), Ch. 3, Ch.4

26.(　4　) 假設機率的成績具常態分配平均數 70 分，標準差 10 分。為鼓勵同學好好學機率，老師給機率成績 85 分以上者一個書卷獎。若隨機挑 2 位同學，試求其中至少有 1 位領到書卷獎的機率。

(1) 0.0045 (2) 0.0668 (3)0.3821 (4) 0.9955　　(難)

【計算過程】

X:機率成績~$N(\mu=70,\sigma^2=10^2)$

$P(X>85)=P(Z>1.5)=0.0668$

Y:書卷獎的人數~二項分配$(n=2, p=0.0668)$

$P(Y\geq 1)=1-P(Y=0)=1-(0.0668)^2=0.9955$

【題目出處】

Hogg & Tanis (2009), Ch. 2, Ch.3

27.(　3　)若 X，Y 為兩獨立且相同分配之隨機變數，其機率分配函數為

$$f(x)=0.75\,(0.25)^x，x=0,1,\cdots。$$

試求P(X = Y)

(1) 0.25 (2) 0.50 (3) 0.60 (4) 0.75　　（中）

【計算過程】

$$P(X=Y)=\sum_{k=0}^{\infty}P(X=Y|Y=k)P(Y=k)=\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k)P(Y=k)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(0.75)^2\,(0.25)^{2k}=\frac{0.75}{2-0.75}=0.60$$

【題目出處】Ross, Ch. 4, 6

28.(　2　)某一試劑用來檢驗子宮頸癌，若

P(檢測結果為陰性|有子宮頸癌)=0.10

P(檢測結果為陽性|無子宮頸癌)=0.01

若 P(有子宮頸癌)=0.20，試求 P(有子宮頸癌|檢測結果為陰性)之值。

(1) 0.02 (2) 0.0246 (3) 0.792 (4) 0.812 (中)

【計算過程】

令"－"為陰性，"+"為陽性。

$$P(\text{有癌}|\text{檢測為}-)=\frac{P(\text{有癌}\cap\text{檢測為}-)}{P(\text{檢測為}-)}$$

$P(\text{檢測為}-)=P(\text{檢測為}-\cap\text{有癌})+P(\text{檢測為}-\cap\text{無癌})$

$=P(\text{檢測為}-|\text{有癌})P(\text{有癌})+P(\text{檢測為}-|\text{無癌})P(\text{無癌})$

$=0.1\times0.20+0.99\times0.8=0.02+0.792=0.812$

$$P(\text{有癌}|\text{檢測為}-)=\frac{0.02}{0.812}=0.0246$$

【題目出處】

Hogg & Tanis (2009), Ch. 1

29.(1)若 A 與 B 兩互斥事件，同時又為獨立事件，且 $\mathrm{P(A)}=0.6$，試求$P(\mathrm{B})$之值。

(1) 0 (2) 0.24 (3) 0.42 (4) 0.60 （易）

【計算過程】

若 A 與 B 兩互斥事件，同時又為獨立事件，則 $0=P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})P(B)=0.6P(B)$。

故$\mathrm{P(B)}=0$。

【題目出處】Ross, Ch. 2, Ch. 3

30.(1)設$P(A)\mathrm{P}(B)>0$，下列敘述何者正確？

a. 若$\mathrm{P(A}|B)=\mathrm{P(A)}$，則$\mathrm{P}(B|\mathrm{A})=\mathrm{P}(B)$。

b. 若$\mathrm{P}(A|B)>\mathrm{P}(A)$，則$\mathrm{P}(B|A)>\mathrm{P}(B)$。

c. 若$P(A)>\mathrm{P}(B)$，則$\mathrm{P}(A|C)>\mathrm{P}(B|C)$。

(1) a, b (2) b, c (3) a, c (4) a, b, c （中）

【計算過程】

a. 若$\mathrm{P(A}|B)=\mathrm{P(A)}$，則 $\mathrm{P(A}\cap B)=P(A)\mathrm{P}(B)$。

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap\mathrm{B})}{P(A)}=\frac{P(A)P(B)}{P(A)}=\mathrm{P}(B)。$$

敘述正確。

b. 若$\mathrm{P(A}|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap\mathrm{B})}{P(B)}>\mathrm{P(A)}>0$，則 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap\mathrm{B})}{P(A)}>P(B)$。敘述正確。

c. 令$\mathrm{B}=\mathrm{C}$。若 $\mathrm{P(A)}>\mathrm{P(B)}$，則$1\geq\mathrm{P(A|C)}>\mathrm{P(B|C)}=1$，矛盾。

敘述錯誤。

【題目出處】Ross, Ch. 3

31.(2) 某保險公司將會購買壽險保單的可能投保人分為 A、B、C 三種類型，其比例分別為 A 類型 50%，B 類型 30%，C 類型 20%。三種類型可能投保人會購買壽險保單的機率分別為 A 類型 90%，B 類型 70%，C 類型 50%。若某可能投保人購買了壽險保單，試求此投保人是 C 類型可能投保人之機率。

(1) $\frac{3}{28}$ (2) $\frac{5}{38}$ (3) $\frac{9}{58}$ (4) $\frac{11}{68}$ （易）

【計算過程】

根據貝氏定理 (Bayes' Theorem)，

所求之機率為 $\frac{0.20\times 50\%}{0.50\times 90\%+0.30\times 70\%+0.20\times 50\%}=\frac{10}{76}=\frac{5}{38}$

【題目出處】Ross, Ch. 3.3

32.(3)若隨機變數 X 之動差生成函數(moment generating function)為

$$M_X(\mathrm{t})=\begin{cases}\frac{e^{11t}-e^{t}}{10t}, & t\neq 0\\ 1, & t=0\end{cases},$$

試問下列何者為 X 的第 75 百分位數?

(1) 6.5 (2) 7.5 (3) 8.5 (4) 9.5 （中）

【計算過程】

由隨機變數 X 的動差生成函數可得X 為均勻分配$(1,11)$之隨機變數，

其累積機率分配函數為

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ \frac{x-1}{10}, & 1\leq x<11\\ 1, & x\geq 11\end{cases}。$$

設 a 為 X 的第 75 百分位數，則

$F_X(a)=\frac{a-1}{10}=0.75$。因此，$a=8.5$

【題目出處】Hogg & Tanis, Ch. 3

33.(2)若隨機變數 X 為指數分配(exponential distribution)，且$\mathrm{P}(\mathrm{X}\leq 2)=\mathrm{P}(\mathrm{X}>2)$，下列何者最接近隨機變數 X 之標準差?

(1) 2.731 (2) 2.885 (3) 3.107 (4) 3.349 （易）

【計算過程】

$\mathrm{P}(\mathrm{Y} \leq 2) = 1 - e^{-2\lambda} = \mathrm{P}(\mathrm{X} > 2) = e^{-2\lambda}$，$\lambda = \frac{\ln(2)}{2}$。

因此，X 之標準差為 $\frac{2}{\ln(2)} \approx 2.885$。

【題目出處】Hogg & Tanis，Ch. 3

34.(　1　)若隨機變數 X 之機率密度函數為

$$f_X(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2} & 0 \leq x < \infty \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

令$Y = 1 - e^{-X^2}$，下列何者為隨機變數 Y 之動差生成函數(moment generating function)?

(1) $\frac{e^t - 1}{t}$ (2) $\frac{1}{1-2t}$ (3) $\left(\frac{1}{1-t}\right)^2$ (4) $\left(\frac{2}{2-t}\right)^2$　　（中）

【計算過程】

因$\mathrm{Y} = 1 - e^{-x^2} = F_X(x) = \int_0^x 2we^{-w^2} dw$，根據 Probability Integral Transform 定理，

$Y = 1 - e^{-X^2} = F_X(X)$為分布於(0,1)之均勻分配。

其動差生成函數為 $M_X(\mathrm{t}) = \int_0^1 e^{tx}\, dx = \frac{e^t - 1}{t}$。

【題目出處】Hogg & Tanis，Ch. 3

35. (　2　)若 X，Y 為 2 獨立之隨機變數，其機率分配函數分別為

$$f_X(x) = \frac{e^{-8} 8^x}{x!}，x = 0, 1, \cdots,\qquad ;$$

$$f_Y(y) = \frac{e^{-2} 2^y}{y!}，y = 0, 1, \cdots 。$$

試求$\mathrm{P}(\mathrm{X} \geq 6 |\, \mathrm{X} + \mathrm{Y} = 8)$

(1) 0.689563 (2) 0.796918 (3) 0.862576 (4) 0.935821　　（中）

【計算過程】

$$\mathrm{P}(X = k|\, X + Y = n) = \frac{P(X = k,\ Y = n - k)}{P(X + Y = n)} = \frac{\left(\frac{e^{-8} 8^k}{k!}\right)\left(\frac{e^{-2} 2^{n-k}}{(n-k)!}\right)}{\frac{e^{-10} 10^n}{n!}}$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} 0.8^k 0.2^{n-k}，k = \quad 0, 1, \cdots \mathrm{n}。$$

$\mathrm{P}(\mathrm{X} \geq 6 |\, \mathrm{X} + \mathrm{Y} = 8) = \frac{8!}{6!2!}(0.8)^6\,(0.2)^2 + \frac{8!}{7!1!}(0.8)^7\,(0.2)^1 + \frac{8!}{8!0!}(0.8)^8\,(0.2)^0 = 0.79691776$

【題目出處】Ross, Ch. 4, 6

36.(　1　)有一母體包含 20%的 0，40%的 1 及 40%的 2。X_1, X_2為一組取出放回的隨機樣本，試求$P(|X_2 - X_1| = 1)$

(1) 0.48 (2) 0.32 (3) 0.24 (4) 0.16 (難)

【計算過程】

因為兩事件事互斥， 所以

$P(|X_2-X_1|=1)=P\big((X_2-X_1=1)\cup(X_2-X_1=-1)\big)$ = $\mathrm{P}(X_2-X_1=1)+P(X_2-X_1=-1)$ 。

又因為是取出放回及對稱性，則 $[\mathrm{P}(X_2-X_1=1)=P(X_1-X_2=1)$

所以 $P(|X_2-X_1|=1)=2*P(X_2-X_1=1)$

而 $\mathrm{P}(X_2-X_1=1)=P\big((X_2=1,\ X_1=0)\cup(X_2=2,\ X_1=1)\big)=P(X_2=1,\ X_1=0)+P(X_2=2,\ X_1=1)$, 因為為互斥事件。

因為是取出放回，X_1,X_2獨立，$P(X_2=1,X_1=0)=0.4*0.2=0.08$，

$P(X_2=2,X_1=1)=0.4*0.4=0.16$。

所以 $\mathrm{P}(X_2-X_1=1)=0.16+0.08=0.24$ 。 $2*0.24=0.48$ 為所求。

【題目出處】

Ross，Ch. 6.4

37.(4)$X_1,X_2,\ldots.X_n$為一組隨機樣本其分配為 $\mathrm{P}(X_i=1)=\mathrm{P}(X_i=0)=1/2$。 若$Y_1=\min(X_1,X_2,\ldots.X_n)$ 且$Y_n=\max(X_1,X_2,\ldots.X_n)$。試求 $P(Y_1=0,Y_n=1)$

(1) $(\frac{1}{2})^{n-1}$ (2) $(\frac{1}{2})^{n}$ (3) $\binom{n}{2}(\frac{1}{2})^{n}$ (4) 1 - $(\frac{1}{2})^{n-1}$ (難)

【計算過程】

因 $(Y_1=0,Y_n=1)$的餘集為$(Y_1=1\text{ or }Y_n=0)$，

$P(Y_1=1)=P\big(\text{所有}X_i=1\big)=(\frac{1}{2})^n$ 且 $P(Y_n=0)=P\big(\text{所有}X_i=0\big)=(\frac{1}{2})^n$

則 $P(Y_1=0,Y_n=1)=1-P(Y_1=1\text{ or }Y_n=0)=1-P(Y_1=1)-\mathrm{P}(Y_n=0)$

$=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, 其中$\big(Y_1=1\big)$與$\big(Y_n=0\big)$為互斥事件

【題目出處】

Ross，Ch. 6.6

38.(1)有關常態分配之敘述，參數 μ 及 σ 分別表示期望值及標準差。

(A) 只要有 μ 及 σ 就可決定一常態曲線

(B) 算術平均數=中位數=眾數

(C) 以 $x=\mu$ 為中心且左右兩邊對稱

(D) 曲線在 $x=\mu\pm2\sigma$ 處有反曲點

(E) 常態曲線下總面積不為 1

(F) $\mathrm{P}(\mu+2\sigma<x)\neq\mathrm{P}(\mu+2\sigma\leq x)$

以上敘述，何者正確?

(1) (A)、(B)及(C)

(2) (B)、(C)及(D)

(3) (A)、(B)、(C)及(F)

(4) (B)、(C)、(D)及(F)

(中)

【計算過程】

(D) 曲線在 $x = \mu \pm \sigma$ 處有反曲點

(E) 常態曲線下總面積為 1

(F) $P(\mu + 2\sigma < x) = P(\mu + 2\sigma \le x)$

【題目出處】

Hassett & Stewart，Ch. 8.4

39.(4)兩個事件 A 與 B，P(A) = 0.3、P(B) = 0.5 且 $P(A \cup B)=0.6$，則 $P(A^c \mid B^c)$ =?

(1) 0.5 (2) 0.6 (3) 0.7 (4) 0.8 (易)

【計算過程】

$P(A^c \mid B^c) = P(A^c \cap B^c) / P(B^c) = (1- P(A \cup B)) / 1- P(B)) = 0.4/0.5 = 0.8$

【題目出處】

Hassett & Stewart，Ch. 2.4.2

40.(3)若X, Y為聯合常態分配之隨機變數，其有相同的平均數 0，及相同的變異數 1 且共變異數為 0.5。試求 $P(X + Y \le \sqrt{3})$

(1) 0.11 (2) 0.16 (3) 0.84 (4) 0.96 (中)

【計算過程】

因 X, Y 為聯合常態分配分配，則 $X + Y$ 為常態分配其平均數為 $0 + 0 = 0$，變異數為 $1 + 1 + 2 * 0.5 = 3$。將 $X + Y$ 標準化，得

$P(X + Y \le \sqrt{3}) = P(Z < (\sqrt{3} - 0)/\sqrt{3}) = P(Z < 1) = 0.84$

【題目出處】

Hogg & Tanis，Ch. 4.4