C4 壽險數學與數理統計

共 25 題　一題 4 分

1. (3) 假設某一險種之客戶申請理賠次數服從卜瓦松(Poisson)分配，每天期望的理賠案件申請數為 5 件。若已知前兩個工作日總共接獲的理賠申請案件共計 12 件，假設新工作日即將開始，並假設上下午工作時間長度相同，請計算第一個新理賠案件申請是發生在當天下午的機率？

(1) 0.007　(2) 0.034　(3) 0.075　(4) 0.082　(中)

【計算過程】

假設 T 是等待第一個理賠案件所需要的時間，依題意

$\Pr\{1 > T > 0.5\} = \Pr\{T > 0.5\} - \{T > 1\} = Pr\{N(0.5) = 0\} - Pr\{N(1) = 0\} = e^{-2.5} - e^{-5} = 0.0753$

【題目出處】

考試範圍：A1-(2)(4)
Page 6, Example 1.7. Some important time intervals. Daniel, J.W., "Poisson processes (and mixture distributions)," Study Note, June 2008.

2. (1) 已知 A、B 兩險種個別之客戶申請理賠次數X_A、X_B為獨立之隨機變數，且 A 險種之客戶申請理賠次數X_A以及兩險種合計之客戶申請理賠次數$X_{A+B}(=X_A + X_B)$皆服從卜瓦松(Poisson)分配，期望值分別為μ_A、μ_{A+B}，且$\mu_{A+B} > \mu_A$。請問 B 險種之客戶申請理賠次數X_B是否服從卜瓦松(Poisson)分配，其期望值為何？

(1) 是、$\mu_{A+B} - \mu_A$　(2) 是、$\frac{\mu_{A+B}}{\mu_A}$　(3) 否、$\mu_{A+B} - \mu_A$　(4) 否、$\frac{\mu_{A+B}}{\mu_A}$　(易)

【計算過程】

此題在考觀念，證明可以由 mgf 計算得到

【題目出處】

考試範圍：A1-(5)

Page 157, Exercise 2.14. Hogg, R.V., McKean, J.W. and Craig, A.T., “Introduction to Mathematical Statistics,” (Seventh Edition), 2013, Prentice Hall.

3. （2）若$N_1(t)$、$N_2(t)$為兩個獨立的隨機變數，皆服從卜瓦松(Poisson)分配，其速率函數分別為(rate of function)$\lambda_1(t)=2t$、$\lambda_2(t)=\frac{1}{t+1}$，令$N(t)=N_1(t)+N_2(t)$，則$\text{var}[N(t)]=$？

(1) $2t+\frac{1}{t+1}$　(2) $t^2+ln(t+1)$　(3) $ln\left(\frac{2t}{t+1}\right)$　(4) $ln\left(\frac{t^2}{t+1}\right)$　（中）

【計算過程】

$N(t)$服從卜瓦松(Poisson)分配，速率函數為$\lambda(t)=2t+\frac{1}{t+1}$，所以

$$E[N(t)]=\int_0^t\left(2s+\frac{1}{s+1}\right)ds=\int_0^t 2sds+\int_0^t\frac{1}{s+1}ds=s^2|_0^t+\ln(s+1)|_0^t=t^2+\ln(t+1)$$

【題目出處】

考試範圍：A1-(5)

Page 9, Fact 1.15. Sum of Poisson Process. Daniel, J.W., “Poisson processes (and mixture distributions),” Study Note, June 2008.

4. （4）在給定λ時，N 是一個期望值為λ之齊次卜瓦松過程(homogeneous Poisson process)；而λ是透過一個公正骰子而決定。請計算$E[N(2)]$？

(1) 3　(2) 3.5　(3) 6　(4) 7　（易）

【計算過程】

依題意，$E[N(2)]=E[E(N(2)|\lambda)]=E[2\lambda]=7$

【題目出處】

考試範圍：A2

Page 12, Example 1.24. Daniel, J.W., “Poisson processes (and mixture distributions),” Study Note, June 2008.

5.　(1) 假設$f(x)=\begin{cases} cx(3-x)^3，0<x<3 \\ 0， \quad \text{otherwise} \end{cases}$；若$f(x)$是一個機率密度函數，請問$c$是多少？

(1) $\frac{20}{243}$　(2) $\frac{40}{243}$　(3) $\frac{20}{81}$　(4) $\frac{40}{81}$　　(中)

【計算過程】

令$y=\frac{x}{3}$，$dy=\frac{1}{3}dx$，

$\int_0^3 cx(3-x)^3dx=\int_0^1 c3y(3-3y)^3 3dy=c3^5\int_0^1 y(1-y)^3dy=$

$c3^5\frac{\Gamma(2)\Gamma(4)}{\Gamma(2+4)}=c3^5\frac{3!}{5!}=1$

$$\mathrm{c}=\frac{5!}{3^5 3!}=\frac{20}{243}$$

【題目出處】

考試範圍：A2

Page 168, Exercise 3.20. Hogg, R.V., McKean, J.W. and Craig, A.T., “Introduction to Mathematical Statistics,” (Seventh Edition), 2013, Prentice Hall.

6.　(4) 考慮利用複合卜瓦松過程(compound Poisson process)建構 A 銀行某一組放款組合之損失，假設每月違約事件發生的次數期望值為 10 件，並考慮違約幅度服從指數分配，每次損失期望值為 5 萬。請問該放款組合一年損失金額之期望值與變異數分別為多少？

(1) 50 萬、55 萬　(2) 50 萬、77 萬　(3) 600 萬，55 萬　(4) 600 萬、77 萬　　(中)

【計算過程】

$\mathrm{S}(1)=\sum_{\mathrm{j}=1}^{N(1)}X_j$；$\mathrm{N}(1)\sim P_0(120)$，$X_j\sim Exp\left(\frac{1}{5\text{ 萬}}\right)$

$\mathrm{E}[S(1)]=\mathrm{E}[N(1)]\mathrm{E}\left[X_j\right]=120*50000=6{,}000{,}000$

$\mathrm{Var}[S(1)]=\mathrm{E}[N(1)]\mathrm{Var}\left[X_j\right]+Var[N(1)]E\left[X_j\right]^2$

$=120*25*10^8+120*25*10^8=6000*10^8$

$\sqrt{\mathrm{Var}[S(1)]} = 774{,}600$

【題目出處】

考試範圍：A3

Page 7, Fact 1.11 and Example 1.12. Daniel, J.W., “Poisson processes (and mixture distributions),” Study Note, June 2008.

7. (4) 假設 A 保險公司之車體損失保險可以分為有自付額與無自負額兩類，兩類損失之發生機率與損失金額皆彼此獨立。假設 A 保險公司使用複合卜瓦松過程(compound Poisson process)建構車體損失保險之損失，已知有自負額者每月理賠件數之期望值為 300 件，且其每次理賠損失金額服從指數分配(期望損失金額為 2 萬元)；無自付額者每月理賠件數之期望值為 100 件，每次理賠損失金額亦服從指數分配(期望損失金額為 4 萬元)。請問 A 保險公司下個月前五件理賠案件都屬於有自負額者之機率為何？

   (1) 0.001　(2) 0.004　(3) 0.117　(4) 0.237　　(易)

   【計算過程】

   依題意，每次損失來自有自負額者的機率是$\frac{300}{300+100} = 0.75$，來自於無自付額者的機率是 0.25，且彼此獨立。

   因此，前五件理賠案件都屬於有自負額者之機率等於$0.75^5 = 0.2373$。

   (A 保險公司下個月理賠件數不足 5 件之機率可以忽略。)

【題目出處】

考試範圍：A3

Page 14, 1.4.2. Sums of compound Poisson process. Daniel, J.W., “Poisson processes (and mixture distributions),” Study Note, June 2008.

8. (1) 假設 5 名學生的大學學測數學成績分別為 35，55，65，65，75，今隨機抽取 2 名

   學生(不放回)並計算其平均成績,試求平均成績的(期望值,變異數)。註:四捨五

   入至整數位。

   (1) (59,69) (2) (60,67) (3) (60,69) (4) (59,67)　(中)

【計算過程】

依題意先計算「平均成績」的機率分配如下:

樣本 ：(X,Y)	$P(X=x, Y=y)$	樣本平均 ：$(X+Y)/2$
(35, 55)	0.10	45
(35, 65)	0.20	50
(35, 75)	0.10	55
(55, 65)	0.20	60
(55, 75)	0.10	65
(65, 65)	0.10	65
(65, 75)	0.20	70

(a)「平均成績」的期望值:

45*0.1+50*0.2+55*0.1+60*0.2+65*0.1+65*0.1+70*0.2=59

(b)「平均成績」的變異數:

$(45-59)^2*0.1+(50-59)^2*0.2+(55-59)^2*0.1+(60-59)^2*0.2+(65-59)^2*0.1+(65-59)^2*0.1$
$+(70-59)^2*0.2=69$

【題目出處】考試範圍：B1

Hogg, R.V., McKean, J.W. and Craig, A.T., "Introduction to Mathematical Statistics," (Seventh Edition), 2013, Prentice Hall.

9. (2) 若每一個星期遷移至某行政區域的家庭戶數服從卜瓦松(Poisson)分配 $Poi(\theta)$，其中 $\theta = 3$ 。假設每一個家庭的人口數獨立並且是 1 人、2 人、3 人、或 4 人的機率分別是 1/6、1/3、1/3、與 1/6。試求在四個星期內遷移至該行政區域的人口數之期望值與變異數:(期望值，變異數)。

(1) (28, 83) (2) (30, 86) (3) (32,89) (4) (34, 92) （易）

【計算過程】

令 Y_i 表示第 i 個家庭的人口數，$X(4)$表示在四個星期內遷移至該行政區域的人口數，則

$$E[Y_i]=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{6}=\frac{5}{2}$$

$$E[Y_i^2]=1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{3}+4^2\times\frac{1}{6}=\frac{43}{6}$$

因此可得 $X(4)$之期望值與變異數分別為:

$$E[X(4)] = \theta \times t \times E[Y_i] = 3 \times 4 \times \frac{5}{2} = 30$$

$$Var[X(4)] = \theta \times t \times E[Y_i^2] = 3 \times 4 \times \frac{43}{6} = 86$$

【題目出處】

Daniel, J.W., “Poisson processes (and mixture distributions),” Study Note, June 2008.

10. (2) 某輪胎公司最近研發新的製程，該公司主管想了解新的製程是否使輪胎的瑕疵比率θ降至 0.1 以下，因此隨機抽取 100 個輪胎進行檢驗，發現 100 個輪胎中僅有 4 個瑕疵品並設定虛無假設與對立假設分別為$H_0:\theta \geq 0.1$與$H_1:\theta < 0.1$。請根據上述條件計算此檢定問題在此筆樣本之下的 p 值(p-value)?

註 : $P(Z < 1.8) = 0.9641$，$P(Z < 2.0) = 0.9772$，$P(Z < 2.2) = 0.9861$，

$P(Z < 2.4) = 0.9918$，$Z \sim N(0,1)$。

(1) 0.0359 (2) 0.0228 (3) 0.0139 (4) 0.0082 （中）

【計算過程】

依題意可以推得決策法則為:

$$\text{拒絕}H_0 \leftrightarrow \mathrm{Z} = \frac{\hat{\theta} - 0.1}{\sqrt{\frac{0.1 \times 0.9}{100}}} = \frac{\hat{\theta} - 0.1}{0.03} \leq -Z_\alpha$$

其中在$H_0:\theta \geq 0.1$之下，檢定統計量 Z 的分配近似於標準常態分配。

此檢定問題為單邊檢定且θ 的估計值$\theta = \frac{4}{100} = 0.04$，所以此檢定的 p 值為:

$$\mathrm{p-value} = \mathrm{P}\left(\mathrm{Z} \leq \frac{0.04 - 0.1}{0.03} \middle| \theta = 0.1\right)$$

$$= \mathrm{P}(\mathrm{Z} \leq -2 | \theta = 0.1) \approx 0.0228$$

【題目出處】

Hogg, R.V., McKean, J.W. and Craig, A.T., “Introduction to Mathematical Statistics,” (Seventh Edition), 2013, Prentice Hall.

11. (1) 令隨機變數 $X_1,\ldots,X_n$ 獨立且服從卜瓦松(Poisson)分配 $Poi(\theta)$，其機率密度函數為

$$f(x;\theta)=\frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!}\ ;\ \theta>0, x=0,1,2,\ldots$$

並假設 θ 的先驗(prior)分配為 Gamma(α, β)，其機率密度函數為

$$\pi(\theta)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\theta^{\alpha-1}e^{-\frac{\theta}{\beta}};\ \theta>0,\alpha>0,\beta>0$$

若$n=10$，$\bar{x}=2$，$\alpha=2$，$\beta=3$，試求後驗分配的(期望值，變異數)。

(1) $\left(\frac{66}{31},\frac{198}{961}\right)$ (2) $\left(\frac{57}{31},\frac{147}{961}\right)$ (3) $\left(\frac{66}{961},\frac{198}{31}\right)$ (4) $\left(\frac{57}{961},\frac{147}{31}\right)$

（中）

【計算過程】

依題意先計算後驗分配

$$\pi(\theta|x_1,\ldots,x_n)\propto\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)\,\pi(\theta)=\frac{e^{-n\theta}\theta^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\theta^{\alpha-1}e^{-\frac{\theta}{\beta}}$$

$$\propto\theta^{\sum_{i=1}^{n}x_i+\alpha-1}e^{-\frac{\theta}{\beta/(n\beta+1)}}$$

因此可知 θ 的後驗分配為 Gamma($\sum_{i=1}^{n}x_i+\alpha$, $\frac{\beta}{(n\beta+1)}$)。

$$E(\theta|x_1,\ldots,x_n)=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i+\alpha\right)\times\frac{\beta}{(n\beta+1)}=(2\times10+2)\times\frac{3}{10\times3+1}$$

$$=\frac{66}{31}$$

$$Var(\theta|x_1,\ldots,x_n)=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i+\alpha\right)\times\frac{\beta^2}{(n\beta+1)^2}$$

$$=(2\times10+2)\times\frac{3^2}{(10\times3+1)^2}=\frac{198}{961}$$

【題目出處】考試範圍：B3

$$[2857 \quad 4286 \quad 2857]\begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = [2857 \quad 4286 \quad 2857]$$

12. （ 3 ）假設新生兒的存活機率密度函數$f_0(t)$如下:

$$f_0(t) = \frac{30t^4(100-t)}{100^6}, 0 < t \le 100$$

，請問μ_{80}為何?

(1) 0.051 (2) 0.612 (3) 0.0714 (4) 0.0816 **(難)**

【計算過程】

$$f_0(80) = \frac{30(80)^4(100-80)}{100^6} = 0.0246$$

$$S_0(80) = \int_0^{80} f_0(s)ds = 0.3446$$

$\mu_{80} = \frac{f_0(80)}{S_0(80)} = \frac{0.0246}{0.3446}$ =0.0714

【題目出處】C1

Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks Ch2

13. (1)已知

$$l_{30} = 8000, q_{30} = 0.02, q_{32} = 0.035, q_{33} = 0.04, d_{31} = 180, d_{34} = 450$$

試求 30 歲被保險人在 32 歲至 34 歲內死亡的機率。

(1) 介於 0.1 到 0.2 (2) 介於 0.2 到 0.3 (3) 介於 0.3 到 0.4 (4) 大於 0.4 (易)

【計算過程】

根據題意

x	l_x	d_x	q_x	p_x
30	8,000		0.020	

31		180		
32			0.035	
33			0.040	
34		450		

利用 $l_{x+1}=l_x-d_x$ 且 $q_x=\dfrac{d_x}{l_x}, p_x=1-q_x$ ，得到下表

x	l_x	d_x	q_x	p_x
30	8,000	160	0.020	0.980
31	7,840	180	0.023	0.977
32	7,660	268	0.035	0.965
33	7,392	296	0.040	0.960
34	7,096	450	0.063	0.937

因此

$$_{2|3}q_{30}={}_2p_{30}\,{}_3q_{32}=p_{30}p_{31}(1-p_{32}p_{33}p_{34})=0.1267$$

【題目出處】C1

14. (3)若城市之北區、東區、南區、西區共 50,000 人。5,000 位 30 歲北區的死亡年齡服從均勻分配(30,80)，10,000 位 40 歲東區的死亡年齡服從均勻分配(40,90)，15,000 位 25 歲南區的死亡年齡服從均勻分配(25,100)，20,000 位 50 歲西區的死亡年齡服從均勻分配(50,70)。試求此 50,000 人在 55 歲到 60 歲死亡人數期望值。
(1) 7000 (2) 7250 (3) 7500 (4) 7750 (中)

【計算過程】

死亡人數期望為

$$(5000)\left(\frac{60-55}{80-30}\right)+(10000)\left(\frac{60-55}{90-40}\right)+(15000)\left(\frac{60-55}{100-25}\right)+(20000)\left(\frac{60-55}{70-50}\right)=7500$$

【題目出處】C2

Dickson, *et. al.* (2013), Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks

15.(　2　)假設一位 80 歲的保戶可能因疾病或意外而死亡，其中疾病死亡為情況 1，意外死亡為情況 2，在下列公式下，

$${}_tp_{80}^{(1)} = \frac{60-t}{60}, 0 < t \leq 20$$

$${}_tp_{80}^{(2)} = \frac{30-t}{30}, 0 < t \leq 20$$

試求這位保戶在 88 歲那一年因意外死亡之機率為何？

（1）0.054（2）0.056（3）0.058（4）0.061 **（中）**

【計算過程】

$$\frac{{}_{8|}q_{80}^{(2)}}{{}_8p_{80}^{(\tau)}} = \frac{\frac{1}{30}}{0.6} = 0.056$$

其中

$${}_{8|}q_{80}^{(2)} = {}_9q_{80}^{(2)} - {}_8q_{80}^{(2)} = (1-\frac{30-9}{30}) - (1-\frac{30-8}{30}) = \frac{1}{30}$$

$${}_8q_{80}^{(\tau)} = {}_8q_{80}^{(1)} + {}_8q_{80}^{(2)} = \frac{8}{60} + \frac{8}{30} = 0.4$$

$${}_8p_{80}^{(\tau)} = 1 - {}_8q_{80}^{(\tau)} = 0.6$$

【題目出處】C3

16. (4) 考慮一個多重狀態模型，0、1、2 分別代表健康、失能以及死亡三種狀態，假設所有轉換力(transition intensities, the force of transition)皆為常數，且

$$\mu_x^{01} = 0.015,\ \mu_x^{02} = 0.02,\ \mu_x^{12} = \mu_x^{02},\ \mu_x^{10} = \mu_x^{20} = \mu_x^{21} = 0$$

請計算 ${}_{10}P_{60}^{00}$？

(1) 0.55　　(2) 0.60　　(3) 0.65　　(4) 0.70　　（中）

【計算過程】

$${}_tP_{60}^{00} = {}_tP_{60}^{\overline{00}} = \exp\left\{-\int_0^t (0.015+0.02)ds\right\} = \exp\{-0.035t\}$$

$${}_{10}P_{60}^{00} = \exp\{-0.35\} = 0.7047$$

【題目出處】

考試範圍：C3
Page 254, Example 8-4, (a). Dickson, D. C. M., Hardy, M. R., Waters, H. R., “Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks,” (Second Edition), 2013, Cambridge

17. (3) 考慮一組馬可夫鍊的轉移機率矩陣(transition-probability matrixes)如下，Q_t 表示由時間點 t 到時間點 $t+1$ 之狀態轉換情形：

$$Q_0=\begin{bmatrix}0.80 & 0.10 & 0.05 & 0.05\\0.20 & 0.60 & 0.10 & 0.10\\0 & 0 & 0.80 & 0.20\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ Q_1=\begin{bmatrix}0.70 & 0.15 & 0.10 & 0.05\\0.20 & 0.50 & 0.20 & 0.10\\0 & 0 & 0.70 & 0.30\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$Q_2=\begin{bmatrix}0.60 & 0.15 & 0.15 & 0.10\\0.20 & 0.40 & 0.25 & 0.15\\0 & 0 & 0.60 & 0.40\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ Q_3=\begin{bmatrix}0.50 & 0.20 & 0.20 & 0.10\\0.20 & 0.30 & 0.35 & 0.15\\0 & 0 & 0.50 & 0.5\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$Q_4=\begin{bmatrix}0.40 & 0.20 & 0.20 & 0.20\\0.10 & 0.30 & 0.30 & 0.30\\0 & 0 & 0.40 & 0.60\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

請計算 $\Pr\{M_4=3|M_1=1\}$？

(1) 0.1931 (2) 0.2145 (3) 0.2490 (4) 0.3535 (中)

【計算過程】

$$\Pr\{M_4=3|M_1=1\}=\begin{bmatrix}0.70 & 0.15 & 0.10 & 0.05\\- & - & - & -\\- & - & - & -\\- & - & - & -\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.60 & 0.15 & 0.15 & 0.10\\0.20 & 0.40 & 0.25 & 0.15\\0 & 0 & 0.60 & 0.40\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}- & - & 0.20 & -\\- & - & 0.35 & -\\- & - & 0.50 & -\\- & - & 0 & -\end{bmatrix}$$

$$=0.2490$$

【題目出處】
考試範圍：C4
Page 8, Example 1-21. Daniel, J.W., “Multi-state Transition Models with Actuarial Applications,” Study Note, 2004 (second printing with minor corrections, October

2007)

18. (2) 考慮一汽車保險的駕駛人分類模型，駕駛人被區分為優良體(preferred)，標準體(standard)以及次標準體(substandard)。若每一年度，一個年初為優良體的駕駛人在年底被分類到優良體的機率是 60%，標準體的機率是 30%，次標準體的機率是 10%；一個標準體的駕駛人被分類到優良體的機率是 30%，標準體的機率是 50%，次標準體的機率是 20%；一個次標準體的駕駛人被分類到優良體的機率是 0%，標準體的機率是 40%，次標準體的機率是 60%。請問上述問題是屬於何種馬可夫鍊模型，又其轉移機率矩陣(transition-probability matrixes)如何表示：

(1) 同質性 (Homogeneous)馬可夫鍊模型，$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 0.5 & 0.4 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$

(2) 同質性 (Homogeneous)馬可夫鍊模型，$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$

(3) 非同質性 (Non-homogeneous)馬可夫鍊模型，$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 0.5 & 0.4 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$

(4) 非同質性 (Non-homogeneous)馬可夫鍊模型，$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$

(易)

【計算過程】

定義

【題目出處】

考試範圍：C4

Section 1. Daniel, J.W., “Multi-state Transition Models with Actuarial Applications,” Study Note, 2004 (second printing with minor corrections, October 2007)

19. (3)，假設利率走勢符合離散型馬可夫鏈(discrete Markov chain)，其中利率會逐年改變，並且各年度利率改變是獨立的。相關利率趨勢與機率，陳述如下:

自第 t-3 年至第 t-2 年	自第 t-2 年至第 t-1 年	自第 t-1 年至第 t 年利率上升的機率
利率上升	利率上升	0.2
利率下降	利率下降	0.1
利率上升	利率下降	0.3
利率下降	利率上升	0.4

若自 2013 年至 2015 年連續 2 年利率下降，試求自 2017 年至 2018 年利率下降的機率為何?

(1) 0.75 (2) 0.85 (3) 0.87 (4) 0.91 （易）

【計算過程】

$$機率 = 0.1 \times 0.6 + 0.9 \times 0.9 = 0.87$$

【題目出處】C4

20. (　1　) 假設已使用 x 年的手機餘命 T 服從平均值 5 年的指數分配，當手機喪失功能時，保險給付 1 單位修理費用。試求已使用 5 年手機保費與新手機保費之比率？

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 5 （易）

【計算過程】

因為在指數分配假設下，新手機與舊手機之平均餘命相同，故保費相同。

【題目出處】D1

Dickson, *et. al.* (2013), Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks

21. (　3　)考慮一 x 歲死亡給付於死亡發生年底支付之 3 年死亡險。

- $v = 0.96$
- 第一年死亡給付 1 單位，第二年 2 單位，第三年 3 單位。
- x 歲未來 3 年死亡之機率

$$q_x = 0.02, q_{x+1} = 0.025, q_{x+2} = 0.03$$

試計算年繳保費。

(1) 0.10 (2) 0.12 (3) 0.14 (4) 0.16　（易）

【計算過程】

$$p_x = 0.98,\ {}_2p_x = p_x p_{x+1} = 0.9555,\ {}_3p_x = {}_2p_x p_{x+2} = 0.9268$$

$$q_x = 0.02,\ p_x q_{x+1} = 0.0245,\ {}_2p_x q_{x+2} = 0.0287$$

因此保費 P 為

$$P(1+0.98v+0.9555v^2) = (0.02v+(2)(0.0245)v^2+(3)(0.0287)v^3)$$

得到

$$P = 0.14$$

【題目出處】D1

Dickson, et. al. (2013), Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks

22. (　1　) 電梯每期末的保養費用依據其狀態而定，n 期到 $n+1$ 期之 3 個狀態轉換矩陣 Q_n

$$Q_n = \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, n = 0,1$$

$$Q_n = \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, n = 2,3,4,\ldots$$

若開始的狀態為(1)，轉換發生於期中。

- 若在任一期末的狀態為(1)，則支付保養費 1 單位。
- 若在任一期末的狀態為(2)，則支付保養費 2 單位。
- 若在任一期末的狀態為(3)，則支付保養費 4 單位。
- $i = 2\%$

試求未來 4 期保養費的精算現值(actuarial present value)。

(1) 少於 12 (2) 12 至 13 之間 (3) 13 至 14 之間 (4)大於 14　**(中)**

【計算過程】

第一期末在各狀態之機率為 $(0.6\quad 0.3\quad 0.1)$

第二年末在各狀態之機率為

$$(0.6 \quad 0.3 \quad 0.1)\begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (0.36 \quad 0.18 \quad 0.46)$$

第三年末在各狀態之機率為

$$(0.36 \quad 0.18 \quad 0.46)\begin{bmatrix} 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (0 \quad 0.108 \quad 0.892)$$

第四年末在各狀態之機率為

$$(0 \quad 0.108 \quad 0.892)\begin{bmatrix} 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (0 \quad 0 \quad 1)$$

因此由第四年末開始，永遠為狀態(2)。

令

$$v = \frac{1}{1+2\%} = 0.98039$$

則保養費之精算現值

$$\begin{aligned} &[(0.6)(1)+(0.3)(2)+(0.1)(4)]v \\ &+[(0.36)(1)+(0.18)(2)+(0.46)(4)]v^2 \\ &+[(0)(1)+(0.108)(2)+(0.892)(4)]v^3 \\ &+[(0)(1)+(0)(2)+(1)(4)]v^4 \\ &=11.29 \end{aligned}$$

【題目出處】D2

Daniel (2007), Multi-state Transition Models with Actuarial Applications

Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks Ch4

23. (3)就 3 年期定期壽險，當死亡事故發生時，保險公司會在該保單年度末給付 1000 元保險金，假設 3 狀態離散型馬可夫鏈(3-state discrete Markov chain)，其中狀態 0 表示契約有效，狀態 1 表示失能，狀態 2 表示死亡，並且

$$p^{01} = 0.15, p^{02} = 0.1, p^{10} = 0.5, p^{12} = 0.2, p^{2i} = 0, \mathrm{i} = 0,1$$

在利率為 5%下，試求該保單之躉繳純保險費(Net Single Premium)為何?

(1) 未達 250 元 (2) 高於 250 元，但未達 270 元 (3) 高於 270 元，但未達 290 元 (4) 高於 290 元 **(難)**

【計算過程】

轉換機率矩陣

$$\begin{bmatrix} 0.75 & 0.15 & 0.1 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

第 1 保單年度，各狀態的分布

$(1,0,0)\begin{bmatrix} 0.75 & 0.15 & 0.1 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$=(0.75,0.15,0.1)，第 1 保單年度之死亡率為 0.1

第 2 保單年度，各狀態的分布

$(0.75,0.15,0.1)\begin{bmatrix} 0.75 & 0.15 & 0.1 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$=(0.6375,0.1575,0.205)，第 2 保單年度之死亡率為 0.205-0.1=0.105

第 3 保單年度之死亡率為$0.6375 \times 0.1 + 0.1575 \times 0.2 = 0.0953$

躉繳純保險費=$1000 \times (\frac{0.1}{1.05^1} + \frac{0.105}{1.05^2} + \frac{0.0953}{1.05^3}) = 272.7$

【題目出處】D2

24.(3) 假設一 3 狀態模型(3-state model)表示 x 歲者健康狀況，其中狀態 0 表示健康，狀態 1 表示罹病，狀態 2 表示死亡，並且

$$\mu_x^{01} = 0.005x,\ \mu_x^{02} = 0.001x,\ \mu_x^{10} = 0.003x,\ \mu_x^{12} = 0.002x$$

試計算 ${}_5p_{20}^{\overline{11}}$

(1) 小於 0.4 (2) 0.4 與 0.5 之間 (3) 0.5 與 0.6 之間 (4) 大於 0.6 (中)

【計算過程】

$${}_5p_{20}^{\overline{11}} = \exp\{-\int_0^5 (\mu_{20+t}^{10} + \mu_{20+t}^{12})\, dt\}$$

$$=\exp\{-(0.0025(25^2-20^2))\}=0.5698$$

【題目出處】C3

25. (3)依據以下以年為單位之 2 個狀態轉換矩陣

$$\begin{array}{c} (1) \\ (2) \end{array}\begin{bmatrix} 0.25 & 0.75 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

在未來 3 年內，若被保險人由狀態(2)轉為狀態(1)則保險公司於年末支付 10,000 元，若 $v=0.94$，時間 0 時被保險人狀態為(2)，試求給付現值。。
(1) 少於 9,500 (2) 9,501 至 10,500 (3) 10,501 至 11,500 (4)大於 11,501
(中)

【計算過程】

1 年後支付 1 元的現值為

$$(0.6)(v)=0.5640$$

2 年後支付 10,000 元的現值為

$$(0.4)(0.6)(v^2)=0.2121$$

3 年後支付 10,000 元的現值為

$$[(0.4^2)(0.6)+(0.6)(0.75)(0.6)](v^3)=0.3040$$

支付 10,000 之現值為

$$(10,000)(0.5640+0.2121+0.3040)=10,800.58$$

【題目出處】D2