

C1 機率

選擇題 40 題(每題 2.5 分):

1.(2) 某大型考試之分數呈現常態分配(normal distribution)，平均分數 36 分，標準差 14 分。主試者決定調高考生的成績，調分方式為「原成績開根號，然後乘以 10」。例如:原成績為 36 分，則調整的分數為 $\sqrt{36} \times 10 = 60$ 分。若隨機抽取一位考生，請問此考生調整後的成績高於 80 分之機率為何?

- (1) 0.0026 (2) 0.0228 (3) 0.0764 (4) 0.5000

2.(1) 某耐用商品之壽命具指數分配(exponential distribution)，其平均壽命為 10 年。目前此商品已經使用 5 年，請問可以再使用 5 年以上的機率為何?

- (1) $e^{-0.5}$ (2) e^{-1} (3) $e^{-1.5}$ (4) e^{-5}

3.(2) 若隨機變數 Z 具標準常態分配(standard normal distribution)，

求 $P(Z > 2 | Z > 0)$ 之值。

- (1) 0.0228 (2) 0.0456 (3) 0.4772 (4) 0.9772

4.(1) 若天竺鼠之壽命具均勻分配，平均 5 歲。請問目前四歲的天竺鼠可以歡度 6 歲生日的機率為何?

- (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) 1

5.(3) 若 S 及 T 為兩個獨立，且具相同機率分配之隨機變數，其機率質量函數(probability mass function)為 $f(t) = 0.4^t \times 0.6$, $t = 0, 1, 2, \dots$ ，求 $P(S \neq T)$ 之值。

- (1) 0.0686 (2) 0.4286 (3) 0.5714 (4) 0.9314

6.(2) 若 S 與 T 的聯合機率質量函數(joint probability mass function)為

$$f(s, t) = c(s + 2t), \quad s = 0, 1, 2, \dots, \quad t = 0, 1, 2, \dots, \text{且 } s + t \leq 3$$

則 $P(S > T)$ 之值為何?

- (1) $\frac{1}{30}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{3}{8}$ (4) $\frac{11}{35}$

7. (1) 若 $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_5$ 為 X_1, X_2, \dots, X_5 之順序統計量。已知 X_1, X_2, \dots, X_5 為獨立且具相同機率分配之隨機變數，其機率密度函數(probability density function)為 $f(x) = 1/2, 0 \leq x \leq 2$ ，求 $P(Y_5 > 1)$ 之值。

- (1) $\frac{1}{32}$ (2) $\frac{1}{16}$ (3) $\frac{1}{8}$ (4) $\frac{1}{4}$

8. (3) 若 X_1, X_2, \dots, X_{108} 為來自於均勻分配(uniform distribution) $U(0,12)$ 的隨機樣本， \bar{X} 表樣本平均數，求 $P(\bar{X} > 5.7)$ 之值。

- (1) 0.4601 (2) 0.4641 (3) 0.5359 (4) 0.5398

9. (3) 若 X_1, X_2, \dots, X_{10} 為來自於均勻分配(uniform distribution) $U(-1,1)$ 的隨機樣本，請問 10 個樣本中一半為正值，一半為負值的機率為何？

- (1) 0.0031 (2) 0.4752 (3) 0.2461 (4) 0.5000

10. (1) 若 (X, Y) 具(bivariate normal distribution)之隨機向量，平均數均為 3，變異數均為 4，且相關係數為 -0.6，求 $P(X > 3.6 | Y = 4)$ 之值。

x	-3	-1	0	1	3	5	7
$f(x)$	0.10	0.20	0.15	0.20	0.10	0.15	0.10

- (1) 0.3085 (2) 0.3821 (3) 0.6179 (4) 0.6915

11. (3) 若隨機變數 X 具均勻分配(uniform distribution)， $X \sim U(0,5)$ ，求 $E(X | X > 2)$ 之值。

- (1) 1.5 (2) 2.5 (3) 3.5 (4) 4.5

12. (2) 若 Z_1, Z_2, \dots, Z_{25} 為獨立之標準常態分配(standard normal distribution)，請問 $P(Z_1 + Z_2 + \dots + Z_{25} \leq 1)$ 之值。

- (1) 0.0000 (2) 0.5793 (3) 0.8413 (4) 0.9772

13. (2) 若隨機變數 T 具平均數為 10 之指數分配(exponential distribution)，求 $E(T - 10 | T > 10)$ 之值。

- (1) 0 (2) 10 (3) 15 (4) 20

14. (2) 隨機變數 X 具均勻的分配(uniform distribution) $U(1,3)$ ，若 $Y = 5X - 1$ ，其機率密度函數(probability density function)為 $f(y)$ ，請問 $f(5)$ 之值為何？

- (1) 0 (2) 0.1 (3) 0.2 (4) 0.5

15. (4) 若隨機變數 Y 具常態分配(normal distribution) $N(\mu, \sigma^2 = 25)$ ，已知 $P(Y > 20) = 0.5$ ，請問其平均數 μ 之值為何？

- (1) 5 (2) 10 (3) 15 (4) 20

16. (3) 若隨機變數 Y 之機率密度函數(probability density function)為 $f(y) = 0.2$ ， $10 < y < 15$ ，求 Y 之 90 百分位數之值。

- (1) 4.5 (2) 9.0 (3) 14.5 (4) 15.5

17. (1) 已知 X 之機率密度函數(probability density function) 為 $f(x) = \frac{3}{2}x^2$ ， $-1 < x < 1$ ，求 $E(X)$ 之值。

- (1) 0.00 (2) 0.05 (3) 0.10 (4) 0.15

18. (4) 某馬拉松比賽有 6 位實力相當的選手參加，選手隨機編號 1 至 6 號。請問 6 號選手獲得第一名之機率為何？

- (1) $\frac{1}{6!}$ (2) $\frac{1}{5!}$ (3) $\frac{1}{10}$ (4) $\frac{1}{6}$

19. (4) 決定下組資料的相關係數(coefficient of correlation)為何？

x	8	6	4	7	5
y	9	8	5	6	2

- (1) 0.39 (2) 0.49 (3) 0.59 (4) 0.69

20. (3) X 具有卜瓦松分配(Poisson distribution)且 $2f(0) + f(2) = 2f(1)$ 。試計算 X 之平均數

- (1) $2-\sqrt{2}$ (2) $2+\sqrt{2}$ (3) 2 (4) 1

21. (2) 若 $f(x) = \frac{\binom{4}{x}\binom{6}{6-x}}{\binom{10}{6}}$ ， $x = 0, 1, 2, 3, 4$ 。求此機率分配函數(probability distribution function)的標準差=?

- (1) $\frac{10}{3}$ (2) $\frac{4}{5}$ (3) $\frac{16}{81}$ (4) $\frac{81}{25}$

22. (2) 假設隨機變數 X, Y 及 Z 為互相獨立常態分配(normal distribution)其平均數為 0, 變異數為 1。下列之敘述, 何者正確?

(A) $\frac{X}{Y+Z}$ 為 t 分配

(B) $\frac{X^2}{Y^2+Z^2}$ 為 F 分配

(C) $\frac{2X^2}{\sqrt{Y^2+Z^2}}$ 為 t 分配。

(1) (B)及(C)正確 (2) 沒有正確的 (3) (A)正確 (4) (B)正確

23. (2) 擲兩個骰子 180 次, 若出現數字 7 次之 95%信賴區間為 $(30 - k, 30 + k)$, 則 k 為何?

(1) 2 (2) 10 (3) 5 (4) 20

24. (4) 令 X 和 Y 隨機變數, 其聯合機率密度分配函數(joint probability density function) $f(x, y) = 4xy, 0 < x < 1, 0 < y < 1$

若 $W = X/2, Z = Y/2$, 試問隨機變數 W 和 Z 的聯合機率分配函數為何?

(1) $\frac{wz}{64}$ (2) $\frac{wz}{8}$ (3) wz (4) $64wz$

25. (3) 若隨機變數 X 的機率密度函數(probability density function)為 $f(x)$, 累積分配函數(cumulative distribution function)為 $F(x)$ 。 $Y = |X - k|$, k 為正數, 則 Y 的累積分配函數為?

(1) $F(y - k)$ (2) $F(y + k)$ (3) $F(y + k) - F(k - y)$ (4) $F(y + k) - F(y - k)$

26. (3) 擲一公正骰子直到 1 出現四次就停止, 所需擲次數的變異數為何?

(1) 36 (2) 60 (3) 120 (4) 100

27. (4) X_1, X_2, \dots, X_n 為一組隨機樣本服從常態分配(normal distribution)其平均數為 μ 變異數為 σ^2 , 試問 $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 的變異數為何?

(1) $\frac{(n-1)^2 \sigma^2}{n^2}$ (2) $\frac{2(n-1)^2 \sigma^2}{n^2}$

(3) $\frac{2(n-1) \sigma^2}{n^2}$ (4) $\frac{2(n-1) \sigma^4}{n^2}$

28. (1) 假設 X 及 Y 為具有聯合常態分配(joint normal distribution)之雙變量隨機變數, 且 $\mu_X = \mu_Y = 0, \sigma_X = \sigma_Y = 1$, 且相關係數為 ρ 。當 X 及 $Y - kX$ 互相獨立時, 試求 k 值。

(1) $k = \rho$ (2) $k = 0$ (3) $k = 1$ (4) $k = \rho^2$

29. (2) X_1, X_2, \dots, X_n 為一組隨機樣本服從均勻分配(uniform distribution) $(0, 1)$ ，其樣本全距(sample range) 為 Z ，試問 $P\left(Z \leq \frac{1}{2}\right)$ 為何？

- (1) $\frac{n}{2^{n-1}}$ (2) $\frac{n+1}{2^n}$ (3) $\frac{n-1}{2^{n+1}}$ (4) $\frac{n}{2^n}$

30. (1) 假設 X 及 Y 為雙變量隨機變數且其機率密度函數(probability density function) 與 xy 成比例，當 $0 < x < y < 1$ 。試求 $E(Y|X=x)$ 值，當 $0 < x < 1$ ？

- (1) $\frac{2(1-x^3)}{3(1-x^2)}$ (2) $\frac{2}{3(1-x^2)}$ (3) $\frac{2x}{3}$ (4) $\frac{2(1-x^3)}{3x^2}$

31. (4) 設 X, Y 為獨立且相同的分配，其機率質量函數(probability mass function) 分別為

$$f_X(x) = (0.2)(0.8)^x, \quad x = 0, 1, 2, \dots;$$

$$f_Y(y) = (0.2)(0.8)^y, \quad y = 0, 1, 2, \dots。$$

試問 $P(X + Y > 1)$ 為何？

- (1) 0.322 (2) 0.463 (3) 0.624 (4) 0.896

32. (3) 若隨機變數 X 為 $p = 0.2$ 之二項分配，且 $P(X = 1) = P(X = 2)$ ，試問 $P(X \geq 2)$ 為何？

- (1) 0.42328 (2) 0.49668 (3) 0.56379 (4) 0.62419

33. (2) 若隨機變數 X 之機率密度函數(probability density function) 為

$$f_X(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2} & 0 \leq x < \infty \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

令 $Y = 3 - 3e^{-X^2}$ ，下列何者為隨機變數 Y 之變異數 $Var(Y)$ ？

- (1) 0.33 (2) 0.75 (3) 1.25 (4) 1.50

34. (1) 設隨機變數 X 為分佈於 $(0, 1)$ 之均勻分配(uniform distribution)。若

$$f_{Y|X}(y|x) = 1, \quad x < y < x + 1,$$

試問 $P(Y < 0.25)$ 為何？

- (1) 0.25 (2) 0.50 (3) 0.75 (4) 0.95

35. (1) 設 X, Y 為二維常態分配(bivariate normal distribution)，且 $\mu_X = 5$ ， $\mu_Y = 10$ ， $\sigma_X^2 = 16$ ， $\sigma_Y^2 = 25$ 。若 $\rho_{X,Y} = 0.75$ ，試問 $P(X \leq 8 | Y = 15)$ 為何？

- (1) 0.6915 (2) 0.7967 (3) 0.8389 (4) 0.8888

36. (2) 設 X, Y 為兩個獨立標準常態隨機變數，試問 $P[X^2 + Y^2 > 1]$ 為何？

- (1) 0.36788 (2) 0.60653 (3) 0.72933 (4) 0.77880

37. (1) $f_{X,Y}(x,y) = 4e^{-2x-2y}$, $0 < x < \infty$, $0 < y < \infty$ 。試問 $P(X > Y | X < 2Y)$ 為何?

- (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{3}{4}$

38. (2) 某保險一年總理賠的金額為 $S_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ ，其中 N 為一年所發生理賠的件數， X_1, X_2, X_3, \dots 為獨立且相同分配之理賠金額。若理賠件數 N 與理賠金額 X_i 的動差生成函數(moment generating function)分別為

$$M_N(t) = \frac{0.1e^t}{1 - 0.9e^t}, t < -\ln(0.9)$$

與

$$M_X(t) = (1 - 1000t)^{-1}, t < 0.001。$$

下列何者為 S_N 的變異係數(coefficient of variation)?

- (1) 0.825 (2) 1.000 (3) 1.158 (4) 1.168

39. (1) 設 X, Y 為兩個獨立常態分配，其均數與標準差分別為 $\mu_X = -1/2$ ， $\sigma_X = \sqrt{2}$ ， $\mu_Y = -1$ ， $\sigma_Y = 1$ 。試問 $P[4X^2 + 4X + 8Y^2 + 16Y > 15]$ 為何?

- (1) 0.22313 (2) 0.36788 (3) 0.60653 (4) 0.63212

40. (2) 設 X_1, X_2, X_3 為三個獨立且相同分配之隨機變數，其機率密度函數(probability density function)為 $f(x) = 0.25(0.75)^x$ ， $x = 0, 1, \dots$ 。試問 $P[\min(X_1, X_2, X_3) < 1]$ 為何?

- (1) 0.4219 (2) 0.5781 (3) 0.8594 (4) 0.9844