C4 壽險數學與數理統計

第一部份(共 25 題 每題 3 分)

1. (1) 假設某事件的發生次數($N(t)$)服從期望值為$m(t) = 2t$ 的卜瓦松(Poisson)分配，T_j表示等候到第 j 件事件所需要的等待時間，請計算$\Pr\{T_2 > 1.5\}$？
   (1) 0.20 (2) 0.34 (3) 0.41 (4) 0.56

2. (3) 假設 $N(t)$ 表示在時間區間$[0,t]$內發生事件的次數且 $N(t)$ 服從平均數為 $\lambda(t) = \lambda \times t$ 的卜瓦松過程，試求$5N(3) - 2N(5)$的變異數為何?
   (1) 25λ (2) 30λ (3) 35λ (4) 40λ

3. (2) 假設某公司男性與女性每天上班時間(8 小時)上網的次數分別服從平均數為 6 與 10 的卜瓦松過程。則該公司上班期間每小時員工的上網次數之期望值與變異數為何?(期望值，變異數)
   (1) (3，3) (2) (2，2) (3) (0.75，0.75) (4) (0.8，0.8)

4. (3) 假設某壽險公司每週辦理理賠的次數服從平均數λ=2 的卜瓦松過程且每次理賠的金額服從平均數為 200 美金的指數分配，其中理賠次數與理賠金額相互獨立。試問該壽險公司一個月(四週) 之理賠金額的期望值與變異數為何？(期望值，變異數)
   (1) $(2400, 480000)$ (2) $(2400, 640000)$ (3) $(1600, 640000)$ (4) $(1600, 720000)$

5. (1) 假設某類昆蟲每隻在時間區間$(0,t]$之產卵個數服從平均數$\lambda = 5$的卜瓦松過程，且假設每個卵孵化成幼蟲的機率為 0.8。若假設每個卵是否孵化成幼蟲是互相獨立的，且令 $X(t)$ 表示在時間區間$(0,t]$內孵化出的幼蟲總數，試求 $X(t) = 2$ 的機率。
   (1) $8t^2e^{-4t}$ (2) $8t^2e^{-5t}$ (3) $4t^2e^{-4t}$ (4) $4t^2e^{-5t}$

6. (3) 某產品的壽命 X（以月計算）其機率密度函數為 $f(x;\theta)=\dfrac{2}{\theta}xe^{\frac{-x^2}{\theta}};x>0,\theta>0$。令 $\hat{\theta}$ 為 θ 的最大概似估計式且獨立檢驗 10 個產品的壽命分別為:0.6, 1.5, 0.7, 2.3, 2.4, 1.6, 0.4, 1.8, 1.9, 1.2。試求 θ 的最大概似估計值(四捨五入，取小數兩位)。

（1）1.44（2）1.68（3）2.52（4）2.88

7. (2) 已知隨機變數 $X_1,X_2,...,X_n$ 獨立且有相同的機率密度函數如下:

$$f(x\,|\,\theta)=\frac{\theta}{x^2};\quad 0<\theta\le x<\infty.$$

試求 θ 的最大概似估計式。

(1) $\max_{1\le i\le n}\{X_i\}$ (2) $\min_{1\le i\le n}\{X_i\}$ (3) $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ (4) $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$

8. (2) 由一母體隨機抽取 9 個數值依序為 11, 15, 12, 18, 20, 12, 19, 15, 13。請使用這 9 個數值估計母體變異數。
(1) 10 (2) 11 (3) 12 (4) 13

9. (1) 假設 $X_1,X_2,...,X_{400}$ 為抽自平均數為 μ，變異數為 100 之常態母體的一組隨機樣本，若利用此組樣本檢定 $H_0:\mu=70$ *v.s.* $H_1:\mu=75$ 且拒絕域為 $\{\bar{x}\,|\,\bar{x}>c\}$。若已知顯著水準 $\alpha=0.05$，試求 c 值。(四捨五入，取小數兩位)

註: $P(Z<1.645)=0.95$，$Z\sim N(0,1)$

(1) 70.82 (2) 71.75 (3) 71.53 (4) 72.31

10. (3) 燈泡工廠依過去經驗，出現瑕疵品的比率約為 $p=0.1$。今隨機抽取 6 顆燈泡進行測試，若最多只出現 1 顆瑕疵品則接受 $H_0:p=0.1$ 的假設，否則將接受對立假設 $H_1:p>0.1$。則此測試可能會犯型 I 誤差的機率為何?(四捨五入，取小數兩位)
(1) 0.05 (2) 0.08 (3) 0.11 (4) 0.14

11. (2) 假設隨機變數$X_1,\ldots,X_n$獨立並服從 Bernoulli(p)，若 p 的先驗分配為 Beta(a,b)，試問參數 p 的$1-\alpha$ 貝氏區間估計為何?

註: $Y=\sum_{i=1}^{n} X_i$ 與 $P(X>\beta_{a,b,\alpha})=\alpha$ ，其中$X\sim$ Beta(a,b)

(1) $\left[\beta_{y+a-1,n-y+b-1,1-\alpha/2},\beta_{y+a-1,n-y+b-1,\alpha/2}\right]$

(2) $\left[\beta_{y+a,n-y+b,1-\alpha/2},\beta_{y+a,n-y+b,\alpha/2}\right]$

(3) $\left[\beta_{y+a-1,n-y+b,1-\alpha/2},\beta_{y+a-1,n-y+b,\alpha/2}\right]$

(4) $\left[\beta_{y+a,n-y+b-1,1-\alpha/2},\beta_{y+a,n-y+b-1,\alpha/2}\right]$

12. (4) 假設隨機變數Y 服從二項分配$Bin(n,\theta)$且參數θ的先驗分配為均勻分配$U(0,1)$，若考慮θ的估計式$\delta(Y)$之損失函數為$l(\theta,\delta(Y))=\dfrac{(\theta-\delta(Y))^2}{\theta(1-\theta)}$，則當$n$=18與 $y=10$時，θ的貝氏估計量為何?

(1) $\frac{9}{16}$ (2) $\frac{9}{17}$ (3) $\frac{7}{9}$ (4) $\frac{5}{9}$

13. (2) 假設 1 歲幼兒有 9,700 位，其存活相關假設如下:

$$q_1=q_2=0.02,\ q_4=0.026,\ d_3=232$$

，請問存活到 5 歲幼兒會有幾位?

(1) 未達 8,845 人 (2) 高於 8,845 人，但未達 8,850 人 (3) 高於 8,850 人，但未達 8,855 人 (4) 高於 8,855 人

14. (3) 假設

- Z 表示 10 年遞延終身壽險，死亡保額 1 元之現值隨機變數 (present value random variable)
- 死亡給付於死亡發生時立即給付
- $\mu_{x+t}=0.01,t>0$
- δ_t為時間t的息力(force of interest)

$$\delta_t = \begin{cases} 0.06 & 0 \le t < 5 \\ 0.05 & 5 \le t < 10 \\ 0.04 & t \ge 10 \end{cases}$$

計算$Var(Z)$

(1) 0.01946 (2) 0.02138 (3) 0.02257 (4) 0.02361

15. (2)在 UDD(uniform distribution of deaths)假設下，已知$\overset{\circ}{e}_{45} = 32$，且

$1000q_{44} = 10$，計算$\overset{\circ}{e}_{44.5}$

(1) 32.32 (2) 32.34 (3) 32.36 (4) 32.38

16. (3)以下為兩種脫退因子之脫退表

年齡(x)	$d_x^{(1)}$	$d_x^{(2)}$	$l_x^{(\tau)}$
60	9	5	100
61	8	--	86
62	7	--	74
63	6	--	64

假設$l_{60}^{(\tau)} = 100$，試求 ${}_3q_{60}^{(2)}$為何?

（1）0.10（2）0.11（3）0.12（4）0.13

17. （ 4 ）假設有二個職業團體，分別為 30 歲及 50 歲團體，各有 1 萬人，並具有下列多種脫退之特徵:

年齡(x)	因職災死亡 $q_x^{(1)}$	因疾病死亡 $q_x^{(2)}$	因其他原因脫退 $q_x^{(3)}$
x <32	0.01	0.002	0.001
x ≥32	0.02	0.003	0.002

，試求該等二團體在 3 年後仍存續的總人數?

（1） 未達 18,500 人 （2） 高於 18,500 人，但未達 18,600 人 （3）高於 18,600 人，但未達 18,700 人（4）高於 18,700 人

18. (1) 假設兩位獨立的 x 歲與 y 歲被保險人

- $\mu_{x+t} = 0.04t$
- $\mu_{y+t} = 0.05t$

試計算 $10,000 q_{\overline{xy}}$

(1) [4, 5] (2) [5, 6] (3) [6, 7] (4) 7 以上

19. (3) 有一家保險公司賣了 100 張失能扶助保單，每張保單之保障內容均為當保戶於每一單位時間處於失能狀態時，給付 10 元失能扶助金，當假設 3 狀態離散型馬可夫鏈(3-state discrete Markov chain)，其中狀態 0 表示健康，狀態 1 表示失能，狀態 2 表示死亡，並且

$$p^{01} = 0.2, p^{02} = 0.1, p^{10} = 0.1, p^{12} = 0.2, p^{2i} = 0, \mathrm{i} = 0,1$$

，試求在時間 0 至時間 2 內保險公司支付了多少保險金?

（1）450（2）460（3）480（4）500

20. (1) 對於一 3 狀態的馬可夫鏈(3-state Markov chain)，假設

$$\mu^{01}_{50+\mathrm{t}} = 0.09(\mathrm{t}+1), \quad \mu^{02}_{x+t} = 0.0001(1.07)^{x+t},$$
$$\mu^{10}_{50+t} = 0.08(\mathrm{t}+1), \quad \mu^{12}_{x+t} = 0.0001(1.08)^{\mathrm{x+t}}$$

利用 Euler 方法，區間長度 0.1 估算 ${}_{0.2}p^{00}_{50}$

(1) 0.981 (2) 0.982 (3) 0.983(4) 0.984

21.(3) 有一個年齡均為 30 歲的團體，其中吸菸者(S)佔 25%，而非吸菸者(NS)佔 75%，假設死亡率如下:

年齡(x)	吸菸者(S)死亡率 $\mathrm{q}_{\mathrm{x}}^{(S)}$	非吸菸者(NS)死亡率 $\mathrm{q}_{\mathrm{x}}^{(S)}$
30	0.10	0.05
31	0.20	0.10
32	0.30	0.15

假設 i=0.02，倘若從這團隊隨機抽取一位成員，試求該成員投保 1 萬元保額的二年期定期險(保險金於該死亡年度末給付)之躉繳純保費

($10000 \times \mathrm{A}^{1}_{30:\overline{2|}}$)為何?

（1）1,690（2）1,710（3）1,730（4）1,750

22. (1) 某一 x 歲 4 年期保額 1 單位之死亡保險內容如下：

- 年繳保費 0.5
- 利率 4%
- $P(K_x = k) = 0.25, k = 0,1,2,3$

計算第 2 年末責任準備金

(1)0.2027 (2) 0.1869 (3) 0.1637 (4) 0.1418

23. (3) x 歲男性投保三年期生死合險，在下列假設前提下:

(A)Z 代表該保險給付現值變數

(B)$q_{x+k} = 0.02(\mathrm{k}+1), k = 0,1,2$

(C)下表為三年期生死合險之死亡保額b_{k+1}元，並於該死亡年度末給付

k	b_{k+1}
0	1,000
1	2,000
2	3,000

(D) 三年期生死合險之滿期生存保額為 3,000 元，於第三年度末給付

(E) i=0.02

，試算 $\mathrm{E}[\mathrm{Z}]$為何？

(1) 未達 2,740 元 (2) 高於 2,740 元，但未達 2,750 元

(3) 高於 2,750 元，但未達 2,760 元(4) 高於 2,760 元

24. (2) 保險公司推出 2 年期定期壽險(含重大傷病加額給付),其給付內容為:

(A)初次罹患重大傷病時，保險公司會在該保單年度末給付 1,000 元保險金，保單持續有效，之後，如於下一保單年度發生死亡事故時，則再於年度末給付 2,000 元保險金;

(B)若未發生罹患重大傷病且死亡事故發生時，保險公司會在該保單年度末給付 2,000 元保險金。

假設 3 狀態離散型馬可夫鏈(3-state discrete Markov chain)，其中狀態 0 表示未曾出險，狀態 1 表示罹患重大傷病，狀態 2 表示死亡，且

$$p^{01} = 0.1, p^{02} = 0.05, p^{10} = 0, p^{12} = 0.08, p^{2i} = 0, \mathrm{i} = 0,1$$

在利率為 2%下，試求該保單之躉繳純保險費(Net Single Premium)為何?

(1) 未達 370 元 (2) 高於 370 元，但未達 380 元

(3) 高於 380 元，但未達 390 元 (4) 高於 390 元

25. (3) 考慮一汽車保險駕駛人分類費率模型，駕駛人被區分為優良體(preferred)以及標準體(standard)。若每一年度，一個年初為優良體的駕駛人在年底維持為優良體的機率是 70%，改變為標準體的機率是 30%；一個標準體駕駛人改變為優良體的機率是 50%，維持為標準體的機率是 50%。為了鼓勵駕駛人謹慎駕駛，該汽車保險人決定提供優良體駕駛人保費優惠，優惠的內容是立即提供優良體駕駛人 1,000 元的保費折價，而只要能夠持續維持為優良體，每年度的保費仍可以減少 1,000 元，一旦變成標準體則該項優惠永久消失。對於一個期初為優良體的被保險人而言，請問此項優惠期望成本於期初是多少(假設 υ =0.95，不考慮死亡率以及脫退率)？

(1) 2,462 (2) 2,703 (3) 2,985 (4) 3,333

第二部份(共 5 題 每題 5 分)

26. (2) 某公司秘書每分鐘可打 75 個字，但是每小時會出現 9 個錯別字。若今天公司請該秘書打一份 200 個字的合約，請問該合約完全沒有錯誤的機率為何?

(1) $e^{-0.5}$ (2) $e^{-0.4}$ (3) $e^{-0.3}$ (4) $e^{-0.2}$

27. (4) 已知隨機變數 $X_1, X_2, ..., X_n$ 獨立且有相同的機率密度函數如下:

$$f(x|\theta) = \frac{1}{2\theta}; \quad -\theta < x < \theta, \theta > 0.$$

試求θ的最小變異不偏估計式。

(1) $\frac{n}{n-1}\max_{1\le i\le n}|X_i|$ (2) $\frac{n-1}{n}\max_{1\le i\le n}|X_i|$ (3) $\frac{n}{n+1}\max_{1\le i\le n}|X_i|$ (4) $\frac{n+1}{n}\max_{1\le i\le n}|X_i|$

28. (2) 假設$\mu_x = \frac{1}{\omega - x}$, $0 \le x \le \omega$，且

$$\dot{e}_{20:\overline{2n|}} = 25, \dot{e}_{20:\overline{4n|}} = 40, \; n < (\omega - 10)/4$$

試求$\dot{e}_{20:\overline{3n|}}$為何?

(1) 32.25 (2) 33.75 (3) 34.5 (4) 35.25

29. (4) 某甲 40 歲購買終身壽險，其內容如下：

- 死亡保障 10,000 元
- 死亡保障於死亡發生的年末支付
- 保費及費用於年初支付，共計 20 期
- $l_x = 10(120-x), 0 \le x \le 120$
- $i = 0$
- 費用支付表

	保費基礎(per premium)	保單基礎(per policy)
第一年度	80%	15
續年度	4%	1

根據等價原則(equivalence principle)計算總保費。

(1) 小於 600 (2) 600 至 610 之間 (3) 610 至 620 之間 (4) 大於 620

30. (2)考慮一個 4 年手機保固險。假設手機 3 種狀態分別為：正常(0)、送修(1)、損壞(2)。當手機為送修(1)狀態時，不用支付保費；狀態為損壞(2)的當年年底給付 10,000 元。各種狀態第 t 年 $t=1,2,\cdots$ 的轉移機率如下：

j	p_t^{j0}	p_t^{j1}	p_t^{j2}.
0	0.85	0.12	0.03
1	0.30	0.65	0.05
2	0	0	1

在利率 $i = 10\%$ 情況下，計算每年年初應繳保費。

(1) 介於 330 至 335 (2) 介於 335 至 340

(3) 介於 340 至 345 (4) 大於 345