C 1 機率

選擇題 40 題(每題 2.5 分):

1. (4)若$Z_1, Z_2, \dots, Z_{36}$為獨立之標準常態分配(standard normal distribution)，試求$P(Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{36} \leq 3)$之值。

(1) 0.5000 (2) 0.5398 (3) 0.6179 (4) 0.6915

2. (2)已知隨機變數X之累積機率分配(cumulative distribution function)$F(x)$如下，

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{5}, & 0 \leq x < 5 \\ 1, & x \geq 5 \end{cases}$$

試求$E(X)$之值。

(1) 1.5 (2) 2.5 (3) 3.5 (4) 4.5

3. (1)若百貨公司專櫃平均每小時 8 位顧客，其中 6 位顧客只詢問，2 位顧客會購買。假設顧客人數到專櫃具卜瓦松分配(Poisson distribution)且只詢問與購買之間獨立。請問下一位顧客會購買的機率為何?

(1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{3}{4}$ (4) e^{-2}

4. (4)若常態分配(normal distribution)之隨機變數$X \sim N(\mu,\ \sigma^2 = 2\pi)$其機率密度函數(probability density function)為$f(x)$，試求$f(\mu)$之值。

(1) $\frac{1}{(2\pi)^{1.5}} e^{-1}$ (2) $\frac{1}{2\pi} e^{-1}$ (3) $\frac{1}{(2\pi)^{1.5}}$ (4) $\frac{1}{2\pi}$

5. (3)某工廠購買以 10 個產品裝一箱之貨物，其品管人員每箱隨機抽 3 個產品檢視。若 3 個產品中至少有一個瑕疵品，則整箱退貨。若一批貨物中有 20%的箱子內有 4 個不良品；80%的箱子內有 1 個不良品。試求未退貨的比率。

(1) 0.26 (2) 0.48 (3) 0.59 (4) 0.70

6. (4)若U為介於$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$之均勻分配 (uniform distribution)，試求$-2\,ln\left(\frac{U}{\pi}\right)$的期望值。

(1) 1.25 (2) 1.5 (3) 1.75 (4) 2

7. (4)若隨機變數X具卜瓦松分配(Poisson distribution)，其平均數3。試求$E[X^2]$之值。

(1) 3 (2) 6 (3) 9 (4) 12

8. (2)利用核保問卷用來檢驗被保險人的健康風險，若

P(分析結果為正常風險|高風險)=0.10

P(分析結果為高風險|正常風險)=0.01

已知 P(高風險)=0.20，試求 P(高風險|分析結果為正常風險)之值。

(1) 0.020 (2) 0.025 (3) 0.792 (4) 0.812

9. (2)某一產品有2關鍵零組件a及b，任一關鍵零組件失效將導致產品故障。若隨機變數 A 及 B 分別表示關鍵組件 a 及 b 的壽命，已知 a 及 b 平均壽命分別為 5 年及 6 年，A 及 B 為指數分配(exponential distribution)，計算組件 a 失效導致產品故障之機率。

(1) 0.4 (2) 0.45 (3) 0.54 (4) 0.5

10. (3) 隨機變數(X,Y,Z)具聯合機率密度函數(joint probability density function)如下：

$$f_{XYZ}(x,y,z)=\frac{1}{6}e^{-(\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+z)},\quad x>0,\ y>0,\ z>0，$$

試求$X-(Y+Z)$之期望值。

(1) -3 (2) -1 (3) 0 (4) 1

11. (2)在一樣本空間有 3 個事件，給定其發生的機率如下：

P(A) = 0.6, P(B) = 0.5, P(C)=0.4,

P(A∪B)=1, P(A∪C)=0.7, P(C∪B)=0.7

試求 P(A∩B∩C|(A∩B)∪(A∩C)∪(B∩C))=?

(1) 0.28 (2) 0.25 (3) 0.22 (4) 0.19

12. (3)假設丟擲 5 個公正的硬幣且出現至少兩次的正面，試問會出現三次正面的機率為何?

(1) $\frac{5}{16}$ (2) $\frac{13}{16}$ (3) $\frac{5}{13}$ (4) $\frac{3}{16}$

13. (1)有 3 個骰子其出現各點數的機率分別如下:

骰子 1，$f(x) = \frac{1}{6}$;

骰子 2，$f(x) = \frac{x}{21}$;

骰子 3， $f(x) = \frac{x^2}{91}$

隨機取出一個骰子且其出現點數 5，此骰子是骰子 1 的機率為何?

(1) $\frac{91}{371}$ (2) $\frac{1709}{7309}$ (3) $\frac{2459}{7309}$ (4) $\frac{101}{267}$

14. (4)若已知$Y = y$，X之條件機率密度函數(conditional probability density function)為 $f_{X|Y}(x|y) = \frac{1}{y}e^{-x/y}, \quad x > 0,\ y > 0$

試求$P(X > 0|Y = 1)$之值。

(1) 0 (2) $e^{1/3}$ (3) $e^{-1/3}$ (4) 1

15. (2)若 $f(x) = (k + 1)x^2,\ 0 < x < 1$, 試求 X 的中位數。

(1) 2^{-1} (2) $2^{-1/3}$ (3) $2^{1/3}$ (4) 1/3

16. (3)假設$X_i,\ i = 1,2,\cdots,n$為獨立同分配 *i.i.d* 隨機變數滿足期望值為μ，變異數為 100。若n =10,000 求 k 滿足$P_r(|\bar{X}_n - \mu| \le k) = 0.9$。

(1) 0.129 (2) 1.29 (3) 0.1645 (4) 1.645

17. (4)擲骰子 72 次，設 X 為出現 6 的次數，求$E(X^2)$ 之值?

(1) 44 (2) 100 (3) 144 (4) 154

18. (4)若隨機變數 X 的動差生成函數(moment generation function)

$$M_X(t) = \frac{1}{1+t},$$

試求$E((X-2)^3)$ 之值。

(1) -20 (2) -26 (3) -32 (4) -38

19. (4)X, Y其聯合累積分配函數(joint cumulative distribution function)為

$$F(x,y) = a(3x^3y + 2x^2y^2), 0 < x,y < 1$$

試求$f(x,y)$在點(1/2, 1/2)的值?

(1) $\frac{5}{3}$ (2) $\frac{2}{5}$ (3) $\frac{9}{5}$ (4) $\frac{17}{20}$

20. (3)當(x,y)落在 $y = 0,\ x = 0,\ y = 2 - 2x$ 所圍的區域時其聯合機率分配函數(joint probability density function)為

$$f(x, y) = \frac{3(2-2x-y)}{2},$$

試求X邊際分配函數(marginal distribution function), $0 < x < 1$?

(1) $\frac{3}{2}(2-2x)^2$ (2) $\frac{3}{2}(1-x)^2$ (3) $3(1-x)^2$ (4) $\frac{3}{4}(1-x)^2$

21. (4)若$f(x, y) = x^2 + \frac{xy}{3}$, $0 < x < 1$, $0 < y < 2$。
試求 P($X \geq 1/2 | Y \geq 1/2$)之值。

(1) $\frac{33}{64}$ (2) $\frac{43}{64}$ (3) $\frac{19}{32}$ (4) $\frac{43}{52}$

22. (1)$X_1, X_2, \ldots. X_n$為一組隨機樣本服從常態分配(normal distribution)其變異數為σ^2，且任意 p 個變量的共變異數(covariance) 為$\rho\sigma^2$。試求$(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n$的變異數?

(1) $\frac{\sigma^2}{n}(1+\rho(n-1))$ (2) $\frac{\sigma^2}{n}(1+2\rho)$ (3) $\frac{\sigma^2}{n}(1+\rho)$ (4) $\frac{\sigma^2}{n}$

23. (2)若隨機變數 X 在區間(0, a)的機率密度函數(probability density function)為均勻分配(uniform distribution)，則 P($X > X^2$) = ?

(1) $max\,(\frac{1}{a}, 1)$ (2) $min\,(\frac{1}{a}, 1)$ (3) $max\,(\frac{1}{a}, \frac{1}{a^2})$ (4) $min\,(\frac{1}{a}, \frac{1}{a^2})$

24. (2)假設σ_x^2= 18, σ_y^2= 12.5, σ_z^2= 8, $\rho_{xy} = \rho_{xz} = \rho_{yz} = \rho$, 且$\sigma_{x+y+z}^2$= 80。試求 ρ 之值。

(1) 0.62 (2) 0.56 (3) -0.56 (4) -0.62

25. (4)$X_1, X_2, \ldots. X_n$為一組獨立隨機樣本其分配為卡方(Chi-square distribution)，且 X_k 的自由度(degree of freedom) 為 k。試求 $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ 的動差生成函數(moment generation function)?

(1) $(1-t)^{-n(n-1)/2}$ (2) $(1-2t)^{-n(n+1)/2}$ (3) $(1-2t)^{-n(n-1)/4}$
(4) $(1-2t)^{-n(n+1)/4}$

26. (2)若 A 與 B 為兩獨立事件，且$P(A) = 0.6$， $P(B^c | A^c) = 0.8$，則$P(B)$為何?

(1) 0.12 (2) 0.20 (3) 0.32 (4) 0.60

27. (1)某盒子裡有 10 個高爾夫球，其中有 3 個已使用過，7 個尚未使用。A 從盒子隨機拿了 2 個去打高爾夫球，打完球後，將球放回盒子裡。後來，B 也從盒子隨機拿了 2 個去打高爾夫球，試問 B 所拿的 2 個高爾夫球全未被使用過的機率為何?

(1) 0.2904 (2) 0.3240 (3) 0.3783 (4) 0.4286

28. (2)令隨機變數 X 的機率質量函數(probability mass function)為$f_X(x) = \frac{x}{10}$, $x = 1,2,3,4$，而隨機變數 Y 的機率質量函數為

$$f_Y(y) = \frac{5-y}{10},\ y = 1,2,3,4$$

試求

$$E(X) + E(Y) + Var(X) + Var(Y)$$

之值。

(1) 6 (2) 7 (3) 8 (4) 9

29. (1) 假設某保險一年內可能發生理賠的件數 X 為卜瓦松分配(Poisson distribution)。若發生 k 個理賠件數的機率為發生 k-1 個理賠件數機率的 $\frac{8}{k}$倍，試問隨機變數 X 的變異係數為何?

(1) 0.3536 (2) 0.5774 (3) 0.7071 (4) 1

30. (2)若隨機變數 X 的動差生成函數(moment generating function)為

$$M_X(\mathrm{t}) = e^{6(e^t-1)}\ ,$$

試問下列何者為 X 的中位數?

(1) 5 (2) 6 (3) 7 (4) 8

31. (1)投擲兩枚均勻六面骰子 10 次，試問至少出現兩次點數和為 9 的機率為何?

(1) 0.3071 (2) 0.4142 (3) 0.5155 (4) 0.6072

32. (2)若 X，Y 為兩獨立之卜瓦松(Poisson)隨機變數，且$P(X=1) = P(X=2)$，
$P(Y=7) = P(Y=8)$，試問$P(X \leq 2|\ X+Y=8)$為何?

(1) 0.6896 (2) 0.7969 (3) 0.8626 (4) 0.9358

33. (1)假設隨機變數X,Y,Z的聯合機率密度函數(joint probability density function)$f(x,y,z) = cxyz,\ 0 < x,y,z < 1$，求滿足此三個隨機變數獨立之$c >0$值為何？

(1) 8 (2) 27 (3) 64 (4) 125

34. (2)假設隨機變數$X_i,\ i = 1,2,3$之聯合機率密度函數(joint probability density function)為$f(x_1, x_2, x_3) = 8e^{-2(x_1+x_2+x_3)},\ 0 < x_i, i = 1,2,3 < \infty$，試求給定$X_3$下$X_1, X_2$條件機率$f(x_1, x_2|x_3)$

(1) $2e^{-2(x_1+x_2)}$ (2) $4e^{-2(x_1+x_2)}$ (3) $2e^{-2x_3}$ (4) $4e^{-2x_3}$

35. (2) 若 X，Y 為兩獨立之隨機變數，X 與 Y 之機率分配函數分別為

$$f(x) = 0.75\ (0.25)^x，x = 0, 1, \cdots；$$
$$f_Y(y) = 0.25(0.75)^y\ ，y = 0, 1, \ldots$$

試求 P(X = Y)。

(1) 0.1538 (2) 0.2308 (3) 0.3077 (4) 0.3846

36. (4)假設黃金獵犬壽命X為平均壽命 20 年的指數分配(exponential distribution)，試求黃金獵犬會活過 10 年的機率

(1) 0.4568 (2) 0.5000 (3) 0.5214 (4) 0.6065

37. (1)設隨機變數 X 為分佈於(0, 1)之均勻分配(uniform distribution)。若

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{10!}{y!\,(10-y)!} x^y (1-x)^{10-y}，y = 0, 1, \cdots 10$$

試求$P(Y \leq 6)$之值。

(1) 0.6364 (2) 0.7256 (3) 0.8281 (4) 0.8867

38. (3)假設隨機變數X為服從均勻分佈(uniform distribution) $U(0,\ 1)$，令$Y = log(X)$，若$Y_i,\ i = 1,2,3$為獨立隨機變數且和Y分配相同，試求$-\sum_{i=1}^{3} Y_i$的期望值

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

39. (1) 若 X，Y 為兩獨立之隨機變數，其動差生成函數(moment generating function)分別為

$$M_X(t) = \exp[3e^t - 3]\ ，$$
$$M_Y(t) = (0.2e^t + 0.8)^5$$

試求$P(X + Y = 2)$之值。

(1) 0.1448 (2) 0.1365 (3) 0.1258 (4) 0.1145

40. (2)若 1000 位消費者中有 5 位曾經罹患保險保障內之疾病，且核保準確度 90%。試求經過核保確認某消費者曾經罹病時，而實際上此保戶確實曾經罹病的機率

(1) 0.035 (2) 0.043 (3) 0.056 (4) 0.068