C1 機率

選擇題：(每題 2.5 分)

1.(4)精算研究統計中，不同年齡組的駕駛人的人口分佈，以及一年內會發生一次以上碰撞的機率，紀錄如下表:

年齡組	人口分佈百分比%	發生一次以上碰撞的機率
青少年	8	0.15
少壯年	16	0.08
中年人	45	0.04
老年人	31	0.05

如果有一位駕駛人去年已經有一次以上碰撞發生，請問他是少壯年的機率為何?

(1) 0.06 (2) 0.16 (3) 0.19 (4) 0.22

2.(4)令 A, B, C 為三個事件，A 和 B 事件相互獨立，B 和 C 是互斥事件，

$$P(A)=0.25, P(B)=\frac{1}{6}, P(C)=0.5$$

請計算 $P[(A\cap B)'\cup C]=?$

(1) 0.4583 (2) 0.75 (3) 0.8333 (4) 0.9583

3.(1)進行一項疾病篩檢時，已罹病的人有 85%的機率出現陽性反應能被正確地診斷出來; 未罹病的人，有 10%的機率會出現陽性反應被診斷出來有病。假設群體中有 1%的人已罹病。

計算這群體中篩檢出有陽性反應的人已經罹病的機率。

(1) 0.0791 (2) 0.1075 (3) 0.15 (4) 0.9

4.(4)給定下面訊息

(a)一保單組合的風險相互獨立，其風險可分為 A 和 B 兩類

(b)A 風險保單數量是 B 風險的兩倍

(c)每一位被保險人在一個保單年度中，其理賠次數服從一個伯努力分配 (Bernoulli Distribution)

(d)A 和 B 兩風險的理賠金額分配如下:

理賠金額	A 風險	B 風險
50,000	0.6	0.36
100,000	0.4	0.64

(e)一年的平均理賠次數: A 風險為 0.22 次，B 風險為 0.11 次

隨機抽出一位被保險人，兩年損失的總金額為 100,000。計算該被保險人是屬於A風險的機率。

(1) 0.55 (2) 0.57 (3) 0.67 (4) 0.71

5.(2)令隨機變數 X 的動差母函數(mgf)為

$$M(t) = \frac{1}{(1-t)^2}, t < 1$$

求 $E(X^3) = ?$

(1) -24 (2) 24 (3) 0 (4)0.25

6.(3)令隨機變數 X 服從平均數為 λ 的布瓦松(Poisson)分配，

若

$$P(X = 1 \mid X \le 1) = 0.8$$

求 $\lambda = ?$

(1) 0.5 (2) -ln0.8 (3) 4 (4)0.8

7.(3) 給定以下訊息

(a)一保單組合有 10 張獨立保單

(b)每一張保單的每年理賠次數服從一項布瓦松(Poisson)分配，其平均數 $\mu = 0.1$

求這一保單組合在一年內有一個以上理賠次數的機率。

(1) 0.05 (2) 0.1 (3) 0.26 (4) 0.37

8.(1)隨機變數 X 的機率密度函數如下：

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{\theta^3} & 0 \le x \le \theta \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

求分配的 $\dfrac{\text{眾數}}{\text{中位數}}$ 之比值？

(1) 21/3 (2) θ (3) 0 (4) 2-1/3

9.(3)令 N 表示一位被保險人每年理賠次數，N 為一隨機變數。

已知

$$P(N = 0) = \frac{1}{2}, P(N = 1) = \frac{1}{3}, P(N > 1) = \frac{1}{6}$$

令 S 表示某一被保險人一年的總理賠次數。

當 $N=1$，則 S 服從一指數分配，平均數為 5。

當 $N>1$，則 S 服從一指數分配，平均數為 8。

求 $P(4<S<8)=?$

(1) 0.04 (2) 0.08 (3) 0.12 (4) 0.24

10.(4)令 X 為一個連續隨機變數，其機率密度函數如下

$$f(x)=\begin{cases}2e^{-2x} & x>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

令 $Y=e^{-X}$，求隨機變數 $Y>0$ 的機率密度函數？

(1) y (2) $2y^2$ (3) y^2 (4) $2y$

11.(4)給定下列訊息

(a)隨機變數 X 表示損失金額

(b)隨機變數 $Y=lnX$ 服從常態分配，平均數為 6.503，標準差為 1.5。

求 X 大於 1000 的機率為何？(令 $a=P(X>1000)$)

(1) $0.3\le a<0.325$ (2) $0.325\le a<0.350$ (3) $0.350\le a<0.375$ (4) $a\ge 0.375$

12.(3)一保險公司有一大群汽車保險的被保險人，令 X 表示汽車碰撞險的損失，令 Y 表示汽車責任險的損失。X 與 Y 的聯合機率密度函數如下：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x+2-y}{4} & 0<x<1, 0<y<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求總損失 $X+Y$ 大於 1 的機率？

(1) 0.38 (2) 0.41 (3) 0.71 (4) 0.75

13.(3)下列敘述何者為真？

a.若 $P(A)=P(B)=a$，則 $P(A\cap B)\le a^2$。

b. $P(A\cap B)\ge 1-P(A^c)-P(B^c)$。

c.若 $P(A)=0$，則 $P(A\cap B)=0$。

(1) a, b (2) a, c (3) b, c (4) a, b, c

14.(2)投擲一個均勻的六面骰子。若出現之點數為n，則再投擲n枚均勻的硬幣。試問恰有 3 個人頭的機率為何?

(1) $\frac{1}{8}$ (2) $\frac{1}{6}$ (3) $\frac{1}{4}$ (4) $\frac{1}{2}$

15.(4)若隨機變數 X 的動差生成函數為

$$M(t) = 0.1e^{t} + 0.2e^{2t} + 0.3e^{3t} + 0.4e^{4t}$$

試問何者為 X 的均數與變異數的和?

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

16.(4)若隨機變數 X 為 $n = 4, p = 0.5$ 的二項分配，試問何者為 X 的中位數?

(1) 1 (2) 1.5 (3) 2 (4) 不存在

17.(3)某一保險每年有 0.001%的人死於意外事件。在 10000 件此種保單裡，因意外而死亡的件數超過 2 件的機率為何?

(1) 0.095163 (2) 0.004678 (3) 0.000155 (4) 0.000013

18.(2)投擲兩個均勻的六面骰子，直到這兩個骰子出現點數和等於 7 的次數發生 30 次為止。令 X 為此隨機實驗終止時需要投擲兩個骰子出現點數和不等於 7 的次數，試問 X 的變異係數(coefficient of variation)為何?

(1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{1}{5}$ (3) $\frac{5}{6}$ (4) $\frac{5}{12}$

19.(1)某批為數 100 的電子零件，其中 20 個有瑕疵，另 80 個沒有瑕疵。從這 100 個電子零件之中抽取 10 個為樣本。試問這 10 個電子零件中至少 4 個有瑕疵的機率為何?

(1) 0.2615285 (2) 0.330476 (3) 0.407995 (4) 0.592005

20.(1)令 X 為某保單一年發生理賠之件數。若 X 的動差生成函數為

$$M(t) = \exp(5(e^{t} - 1))$$

試問下列敘述何者為真?

a. X 為卜瓦松(Poisson)分配

b. X 為負二項分配

c. $P(X > 2) \approx 0.8753498$

d. $P(X>2)\approx 0.9595723$

(1) a, c (2) b, c (3) a, d (4) b, d

21.(4)下列有關聯合密度函數與邊際機率機率密度函數之敘述何者為真？

a.從 $f_{X,Y}(x,y)$ 可以求得 $F_{X,Y}(x,y)$ 。

b.從 $F_{X,Y}(x,y)$ 可以求得 $f_{X,Y}(x,y)$ 。

c.從 $f_X(x)$ 與 $f_Y(y)$ 可以求得 $f_{X,Y}(x,y)$ 。

d.從 $f_{X,Y}(x,y)$ 可以求得 $f_X(x)$ 與 $f_Y(y)$ 。

(1) a, b (2) c, d (3) a, b, c (4) a, b, d

22.(3) X 與 Y 為兩個獨立的隨機變數，且皆為 $p=\frac{1}{2}$ 的幾何分配。試問 $P(X=Y)=?$

(1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{1}{2}$

23.(3)投擲兩個均勻的四面骰子。令 X 為第一個骰子出現之點數，Y 為兩個骰子出現較大之點數。下列敘述何者為真？

a. $E(Y)=\frac{50}{16}$

b. $E(XY)=\frac{130}{16}$

c. $Var(X)=\frac{5}{4}$

d. $\rho_{X,Y}=\frac{2}{\sqrt{11}}$

(1) a, b (2) b, c (3) a, c, d (4) b, c, d

24.(4) X_1, X_2 為兩個獨立的常態分配 $N(\mu=1,\sigma^2=1)$，Z_1, Z_2 為另兩個獨立的標準常態分配 $N(0,1)$ ，且 X 與 Z 皆互相獨立。下列敘述何者為真?

a. $\bar{X}+\bar{Z}$ 為常態分配。

b. $\frac{(X_1-X_2)^2+(Z_1-Z_2)^2}{2(Z_1+Z_2)^2}$ 為 F 分配。

c. 令 $Y=\bar{X}^2+\bar{Z}^2+2\bar{X}\bar{Z}-2\bar{X}-2\bar{Z}+1$，則 Y 為卡方(Chi-square)分配。

d. $\frac{\bar{X}-1}{|\bar{Z}|}$ 為 t 分配。

(1) a, b (2) a, c (3) a, b, c (4) a, b, c, d

25.(1)令Y_1,Y_2,Y_3為X_1,X_2,X_3的順序統計量(order statistics)。X_1,X_2,X_3則為獨立且相同分配之指數隨機變數，其共同之機率密度函數為

$$f(x)=\beta e^{-\beta x},0<x<\infty$$

令$W_1=Y_1,W_2=Y_2-Y_1,W_3=Y_3-Y_2$，下列敘述何者為真?

a. W_1,W_2,W_3都是指數分配。

b. $P(W_1>a)=P(W_2>a)P(W_3>a)$。

c. $P(W_3>a)=[P(W_1>a)]^3$。

d. $E(W_2)=\beta$。

(1) a, b (2) b, c (3) c, d (4) a, b, c, d

26.(2)已知A及B兩個事件獨立(independent)，若$P(A)>0$且$P(B)>0$，請問這兩個事件是否互斥(mutually exclusive)？

(1)一定互斥(2)一定不互斥(3)一半的機會互斥，一半機會不互斥(4)依狀況而定

27.(3)隨機變數X與Y之聯合機率密度函數(joint probability density function)為

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+2y)}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求$Var(Y\mid X>3,Y>3)$

(1) 0 (2) 0.175 (3) 0.25 (4) 1.48

28.(1)若某醫療險之給付含手術費用及麻醉費用，假設這兩項費用(以萬為單位)可以用二維常態分配描述，若手術費用之平均數為 3 萬，標準差為 0.5 萬；麻醉費用為 1 萬，標準為 0.1 萬；相關係數(correlation coefficient)j 為 0.6。已知麻醉費用為 0.8 萬的清況下，求手術費用大於 3 萬之機率。

(1) 0.0668 (2) 0.1151 (3) 0.5 (4) 0.9332

29.(1) 若隨機樣本由 $f(x)=1-\frac{x}{2},0\le x\le 2$ 中抽出，共有 72 個樣本$\overline{X}$表其平均數，求$P(\frac{2}{3}<\overline{X}<\frac{3}{4})$。

(1) 0.0668 (2) 0.1151 (3) 0.5 (4) 0.9332

30.(2)若 $P(A\cup B)=0.76$ 且 $P(A\cup B^c)=0.87$ ，求 $P(A)$ 。

(1) 0.37 (2) 0.63 (3) 0.6612 (4) 0.8736

31.(3)若某地區之新生兒在滿月前死亡的機率為萬分之一，今年該地區有 2,000 名新生兒，請問這 2,000 名新生兒至少有 1 人於滿月前死亡之機率為何？

(1) 0 (2) 0.07 (3) 0.18 (4) 0.25

32.(4)若已知 $Var(X)=1, Var(Y)=4, Cov(X,Y)=2$ ，求 $Var(X+2Y)$ 。

(1) 11 (2) 13 (3) 17 (4) 25

33.(1)若隨機變數 X 之累積分配函數(cumulative distribution function)為

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-3\\ 0.2, & -3\le x<5\\ 0.8, & 5\le x<10\\ 1, & x\ge 10\end{cases}$$

求 X 之平均數。

(1) 4.4 (2) 5.6 (3) 13.4 (4) 19

34.(3)若隨機變數 X 之累積分配函數(cumulative distribution function)為

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x^2}{4}, & 0\le x<1\\ \dfrac{1}{2}, & 1\le x<2\\ \dfrac{x}{3}, & 2\le x<3\\ 1, & x\ge 3\end{cases}$$

求 X 之平均數。

(1) 0.854 (2) 1.267 (3) 1.583 (4) 2.467

35.(2)若隨機變數 X 與 Y 獨立，已知其動差生成函數(moment generating function) 為

$$M_X(t)=\exp(2t+\frac{t^2}{2})\text{ ， }M_Y(t)=\exp(t+8t^2)$$

求 $P(3X>Y)$=?

(1) 0.5 (2) 0.7257 (3) 0.8346 (4) 0.9999

36.(1)若隨機變數 X 與 Y 獨立，兩隨機變數均具有平均數為 1 之指數分配。若

$Z=\min(X,Y)$，求 $P(Z>1)=?$
(1) exp(-2) (2) 0.5 (3) 1-exp(-1) (4) 2 exp(-1)

37.(2)假設玩具工廠將 10 個玩具打包成一箱，每一箱隨機抽取 3 個檢查，如果這 3 個玩具都無瑕疵，則將整箱玩具出貨。若某一箱玩具有 2 個瑕疵品，請問工廠將這一箱玩具出畫的機率為何？
(1) 0.3333 (2) 0.4667 (3) 0.6667 (4) 0.9333

38.(4)若連續型隨機變數 X 的累積分配函數(cumulative distribution function)為 $F(x)$。令 $Y=F(X)$，若 $g(y)$ 為 Y 的機率密度函數，請問 $g(0.5)=?$
(1) 0.3333 (2) 0.5 (3) 0.6667 (4) 1

39.(2)若 16 個隨機樣本取自常態母體，母體之平均數為 77，變異數為 25，求樣本平均數在 74.2 與 78.4 之間的機率為何？
(1) 0.4875 (2) 0.8561 (3) 0.8686 (4) 0.9875

40.(3)若 100 個隨機樣本取自具二項分配之母體，二項分配之 n=10, p=0.3，樣本之總和為 S，求 $P(295\le S\le 305)=?$
(1) 0.2434 (2) 0.2699 (3) 0.296 (4) 0.345