C1 機率

選擇題：(每題 2.5 分)

1 (3) 令 A, B, C 為三個事件，A 和 B 事件相互獨立，B 和 C 是互斥事件，

$P(A)=0.25, P(A\cap B)=0.2, P(C)=0.5$，求 $P[(A\cap B)'\cup C]=?$

(1) 0.458　(2) 0.75　(3) 0.8　(4) 0.958

2 (3) 若 A 與 B 獨立，且 $P(A)=0.5$，$P(A'\cup B')=0.8$，則 $P(B)$ 為何?

(1) 0.2　(2) 0.3　(3) 0.4　(4) 0.5

3 (1) 假設某保險一年內可能發生理賠的件數為 $0,1,2,3,\cdots$。若發生 i 個理賠件數的機率為發生 i +1 個理賠件數機率的 2 倍，且沒發生理賠事件的機率為 $\frac{1}{2}$。試問一年內發生理賠件數至少 5 件的機率為何?

(1) $\frac{1}{32}$　(2) $\frac{1}{64}$　(3) $\frac{1}{128}$　(4) $\frac{1}{256}$

4 (4) 投擲兩個均勻的六面骰子，直到這兩個骰子出現點數和大於 9 的次數發生 12 次為止。令 X 為此隨機實驗終止時需要投擲兩個骰子出現點數和小於或等於 9 的次數，試問下列何者為 X 的偏度係數(coefficient of skewness)?

(1) 0.5984　(2) 0.6336　(3) 0.7217　(4) 0.8250

5 (4) 由一副撲克中抽取三張牌，一張一張抽，且抽出不放回。請問第三張牌為「紅色牌」的機率為何？

(1) 0.2　(2) 0.25　(3) 0.3　(4) 0.5

6 (3) A、B 二人相約於 9:30 見面，A 騎摩托車、B 搭乘公共運輸工具，假設估算 A 到達的時間為 9:20-9:40 之間，B 到達的時間為 9:15-9:45 之間，若兩人到達時間在估算區間內為均勻分配(uniform distribution)，請問 A 先到達的機率為若干？

(1) $\frac{1}{4}$　(2) $\frac{1}{3}$　(3) $\frac{1}{2}$　(4) $\frac{2}{3}$

7 (1) 三 C 產品銷售時有一定的保證維修期間，銷售人員會同時推銷此產品的「延長維修合約」。若 X 表某三 C 經銷商一天筆記型電腦的銷售數，Y 表示筆記型電腦延長維修合約的銷售數，所以 $X\geq Y$。若 X, Y 聯合機率函數(joint probability function)可以表示為

$$f_{XY}(x,y)=\frac{1}{34}(x+1)(3-x)(y+1)(2-y)\ ,$$

請問一天筆記型電腦的銷售數的最大值及最小值為若干？

(1) 最大值 2，最小值 0　(2) 最大值 3，最小值 1

(3) 最大值 2，最小值 1　(4) 最大值 3，最小值 0

8 (1) 若某測驗有 100 題選擇題，答對 60 題及格，每一題有四個選項之單選題。某位同學每一題都用猜的，請問該生及格的機率？(四捨五入，取小數點四位)

(1) 0.0000　(2) 0.0100　(3) 0.0010　(4) 0.1000

9 (4) 令Y_1, Y_2, Y_3為X_1, X_2, X_3的順序統計量(order statistics)。X_1, X_2, X_3則為獨立，且相同分配之指數隨機變數，其共同之機率密度函數為

$$f(x) = \beta e^{-\beta x}, \quad 0 < x < \infty。$$

令 $W_1 = 3Y_1,\ W_2 = 2(Y_2 - Y_1), W_3 = Y_3 - Y_2$，下列敘述何者為正確?

a. W_1, W_2, W_3 都是指數分配。

b. W_1, W_2, W_3 為獨立且有相同分配之隨機變數

c. $2\beta(W_1 + W_2 + W_3)$ 為自由度 6 之卡方(Chi-square)分配

(1) a, b　(2) b, c　(3) a, c　(4) a, b, c

10 (3) 若某保單在五大都會區一年發生理賠的件數分別為獨立的卜瓦松(Poisson)分配隨機變數X_1, X_2, X_3, X_4, X_5，且各都會區一年平均發生理賠的件數分別為

$$\mu_i = 5 \times i + 65。$$

下列何者為這五大都會區總共一年發生理賠件數超過 380 件的機率?

(1) 0.7823　(2) 0.7910　(3) 0.8365　(4) 0.8925

11 (3) 有一保險之理賠服從一個卜瓦松過程(Poisson process)，平均一個月的理賠率是 100，假設理賠次數和理賠金額相互獨立，其中理賠金額有 2%超過 30,000。求要經過連續幾個月的觀察期，至少有 90%的機率會有至少三件理賠超過 30,000?

(1) 1　(2) 2　(3) 3　(4) 4

12 (2) 下列敘述何者正確？

a. 若 $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{3}$，則 A 與 B 不可能互斥(disjoint)。

b. 設 $P(A)P(B) \neq 0$，且 A 與 B 為兩互斥事件，則 A 與 B 不可能獨立(independent)。

c. 若 $P(A) = P(B')$，則 $A' = B$ 。

(1) b　(2) a, b　(3) b, c　(4) a, b, c

13 (4) 若隨機變數 X 的動差生成函數為

$$\mathrm{M}_X(\mathrm{t}) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4-t}$$

試問 $P(X \leq 4)$ 為何?

(1) $1 - \frac{3}{4}e^{-2}$　(2) $1 - \frac{3}{4}e^{-4}$　(3) $1 - \frac{1}{4}e^{-8}$　(4) $1 - \frac{1}{4}e^{-16}$

14 (2) 令 X 為某保單一年發生之理賠金額。若 X 之機率密度函數(p.d.f.)為

$$f_X(x) = \frac{\alpha\theta^\alpha}{(x+\theta)^{\alpha+1}}，x \geq 0，\alpha > 0，\theta > 0$$

若理賠金額之第 20 百分位數為$\theta - k$，而第 90 百分位數為$3\theta - 2k$，試問α的值為何?

(1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 5

15 (2) 假設天竺鼠的壽命為指數分配(exponential distribution)，公老鼠平均壽命為 4 年，母老鼠為 5 年。今有公老鼠、母老鼠各一隻於同一天出生，若兩隻老鼠的壽命為獨立，請問母老鼠先死亡的機率為何？

(1) $\frac{3}{9}$ (2) $\frac{4}{9}$ (3) $\frac{5}{9}$ (4) $\frac{6}{9}$

16 (3) 已知隨機變數 X 之累積機率分配(cumulative distribution function)如下：

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^2}{50}, & 0 \leq x < 5 \\ 0.8, & 5 \leq x < 10 \\ 1, & x \geq 10 \end{cases}$$

求 32 百分位數 (32nd percentile)(計算至小數點第二位，四捨五入)

(1) 3 (2) 3.5 (3) 4 (4) 4.5

17 (2) 令 X 是在區間 $(1,a)$ 之間的均勻分配 (Uniform distribution) $a>1$。若已知 E(X)=6 Var(X)，求 $a=$?

(1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 7

18 (4) 令 X 服從卜瓦松(Poisson)分配，平均數為 λ。試求

$$E(X(X-1)(X-2)\ldots(X-9)) = ?$$

(1) 1 (2) λ (3) $\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-9)$ (4) λ^{10}

19 (4) 一保險損失分配如下

損失金額($)	損失次數	損失總金額($)
0-99	500	25,000
100-249	450	90,000
250-499	350	125,000
500-999	200	150,000
1000 以上	100	200,000
總和	1600	590,000

當給付上限(limit)是$500 時，求降低成本比率(Percentage reduction in loss cost)?

(1) 34%　(2) 55%　(3) 60%　(4) 66%

20 (　) 有兩個隨機變數 X 和 Y，給定

$$E(X)=3, Var(X)=2, E(Y\mid X=x)=x, Var(Y\mid X=x)=x^3$$

求 $Var(Y)$

(1) 2　(2) 4　(3) 11　(4) 13　【原題出錯】

21 (4) 下列敘述何者正確?

a. 二項分配的均數必大於或等於變異數。

b. 負二項分配的均數必小於或等於變異數。

c. 在某參數值時，指數分配與卡方(Chi-square)分配為相同之分配。

d. 指數分配也是伽瑪(gamma)分配。

(1) d　(2) a, b　(3) a, b, c　(4) a, b, c, d

22 (1) 令 $f_{X,Y}(x,y)=e^{-(x+y)},\ 0<x<\infty,\ 0<y<\infty$。試問 $P(X<Y\mid X<2Y)$ 為何？

(1) $\frac{3}{4}$　(2) e^{-1}　(3) $\frac{1}{2}e^{-1}$　(4) $\frac{3}{4}e^{-1}$

23 (2) X_1, X_2 為兩個獨立的常態分配 $N(\mu=1, \sigma^2=1)$，Z_1, Z_2 為另兩個獨立的標準常態分配 $N(0,1)$，且 X 與 Z 皆互相獨立。下列敘述何者為正確?

a. $\frac{Z_1-Z_2}{\sqrt{(Z_1-Z_2)^2}}$ 為自由度 1 之 t 分配。

b. $[(X_1-X_2)^2+(Z_1-Z_2)^2+(Z_1+Z_2)^2]/2$ 為自由度 3 的卡方(Chi-square)分配。

c. $\frac{2(X_1-X_2)^2}{(Z_1-Z_2)^2+(Z_1+Z_2)^2}$ 為 F 分配　。

(1) a, b　(2) b, c　(3) a, c　(4) a, b, c

24 (1) 假設某種遊戲贏的機率為 0.4，輸的機率為 0.5，不贏不輸(平手)的機率為 0.1。若此遊戲贏可以賺 10 元，輸則賠 10 元，平手 0 元。試問玩此遊戲者，每玩一次預期贏的金額為若干？

(1) −1　(2) 0　(3) 0.5　(4) 1

25 (2) 假設某種遊戲贏的機率為 0.4，輸的機率為 0.5，不贏不輸(平手)的機率為 0.1。若此遊戲贏可以賺 10 元，輸則賠 10 元，平手 0 元。試問玩此遊戲 100 次者，100 次合計不賠錢的機率為若干？

(1) 0.0011　(2) 0.1446　(3) 0.5000　(4) 0.8554

26 (1) 若連續型隨機變數 X 之機率密度函數為

$$f_X(x)=\frac{2|x|}{5}, -1<x<2,$$

求 $E(X)$

(1) 0.93　(2) 1.00　(3) 1.09　(4) 1.20

27 (4) 若隨機變數 X 與 Y 之相關係數為 $\rho_{X,Y}=0.53$，請問 Y 與 X 之相關係數為 $\rho_{Y,X}$ 若干？

(1) –0.53　(2) –0.47　(3) 0.47　(4) 0.53

28 (3) 假設產險公司整理某一年期險種的理賠經驗，公司認為申請理賠的客戶中「一年之總理賠次數」與「一年總理賠金額」的分配可表示於下表：

機率分配		一年之總理賠金額(萬元)			
		(0, 2]	(2, 5]	(5, 10]	合計
一年之總理賠次數	1	20%	40%	30%	90%
	2	1%	1%	5%	7%
	3	0.5%	0.5%	1%	2%
	4	0%	0.2%	0.8%	1%
	合計	21.5%	41.7%	36.8%	100%

請問一年總理賠金額的中位數為何？ (以萬元計算，四捨五入)

(1) 2 萬　(2) 3 萬　(3) 4 萬　(4) 5 萬

29 (1) 某保險一年總理賠的金額為$S_N=X_1+X_2+\ldots+X_N$，其中N為一年所發生理賠的件數，X_1，X_2，X_3，… 為獨立且相同分配之理賠金額。若理賠件數N的機率函數(probability mass function) $f_N(n)=0.2(0.8)^n$，$n=0,1,2,\ .\ .\ .$，而理賠金額X_i的機率密度函數(probability density function)

$$f_X(x)=\frac{1}{500}e^{-x/500},\ 0<x<\infty,$$

下列何者為S_N的動差生成函數分$M_{S_N}(t)$？

(1) $\dfrac{0.2-100t}{0.2-500t}$　(2) $\dfrac{100}{100-t}$　(3) $\dfrac{0.8}{0.2-400t}$　(4) $\dfrac{0.8-400t}{0.2-400t}$

30 (4) 在五個不同地區，若一年發生芮氏規模四級以上地震之次數為獨立且相同的卜瓦松(Poisson)分配隨機變數，平均每年有 0.2 次。若從現在開始計時，在這五個地區之中，試問最早發生芮氏規模四級以上地震至少在 2 年之後的機率為何?

(1) $1-e^{-0.4}$　(2) $e^{-0.2}$　(3) $e^{-0.4}$　(4) e^{-2}

31(1) 令 X 和 Y 為連續的兩個隨機變數，其聯合機率密度函數如下：

$$f(x,y)=\begin{cases}0.25, & 0\le x\le 2, x-2\le y\le x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求 $E(X^3Y)$ =?

(1) $\frac{6}{5}$　(2) $\frac{4}{3}$　(3) 2　(4) 4

32 (2) 給定下面訊息

(1) 一保單組合的風險相互獨立，其風險可分為 A 和 B 兩類

(2) A 風險保單數量是 B 風險的兩倍

(3) 每一位被保險人在一個保單年度中，其理賠次數服從一個白努力分配(Bernoulli Distribution)

(4) 一年的平均理賠次數：A 風險為 0.22 次，B 風險為 0.11 次

求這一保單組合的平均理賠次數。

(1) 0.19　(2) 0.1833　(3) 0.2431　(4) 0.1855

33 (2) 從區間(0,1)中獨立隨機地抽出兩個數，求兩個數的差超過 $\frac{1}{2}$ 的機率?

(1) $\frac{1}{8}$　(2) $\frac{1}{4}$　(3) $\frac{3}{8}$　(4) $\frac{1}{2}$

34 (2) 今有甲、乙、丙、丁、戊五名短跑選手，若此五名選手的實力相當，且彼此之短跑成績為獨立。若前一次賽跑之成績依序如下：甲、戊、乙、丁、丙，請問下一次短跑比賽成績排序為與前次完全相反，依序為：丙、丁、乙、戊、甲的機率為何？

(1) 0　(2) $\frac{1}{120}$　(3) $\frac{1}{24}$　(4) $\frac{1}{5}$

35 (4) 若大型工程平均每 100 件有一件出險，假設出險件數服從卜瓦松(Poisson)機率分配，請問 10 件大型工程均無出險的機率為何？

(1) 0.1　(2) 0.1732　(3) 0.7941　(4) 0.9048

36 (4) 下列敘述何者正確？

a. 若 $P(X>Y)=1$，則 $E(X)>E(Y)$。

b. 若 $E(X)>E(Y)$，則 $P(X>Y)>0$。

c. 若 $Y=X+1$，則對所有的 u，$F_X(u)=F_Y(u+1)$。

(1) a, b　(2) b, c　(3) a, c　(4) a, b, c

37 (4) 兩個隨機變數 (X,Y) 的聯合機率密度函數如下：

$$f(x,y)=\begin{cases}6(1-x-y) & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le x+y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求 $P(0\le X\le \frac{1}{2})=?$

(1) $\frac{1}{12}$　(2) $\frac{7}{12}$　(3) $\frac{1}{4}$　(4) $\frac{7}{8}$

38 (2) (X,Y) 服從一個二維常態分配，

$$\mu_X=3, \sigma_X^2=9, \mu_Y=5, \sigma_Y^2=16, Cov(X,Y)=0$$

求 $P(Y-X>7)=?$

(1) 0.03　(2) 0.16　(3) 0.42　(4) 0.84

39 (2) 令隨機變數 X 的動差母函數(mgf)為

$$M(t)=\frac{\lambda}{\lambda-t}, t<\lambda$$

求 $E(X^2)=?$

(1) $\frac{1}{\lambda}$　(2) $\frac{2}{\lambda^2}$　(3) $\frac{3}{\lambda^3}$　(4) $\frac{1}{\lambda^2}$

40 (4) 令隨機變數 X 和 Y 相互獨立，$Var(X)=1$，$Var(Y)=2$，且 $Z=3X-Y-5$，求 $Var(Z)=?$

(1) 1　(2) 5　(3) 7　(4) 11